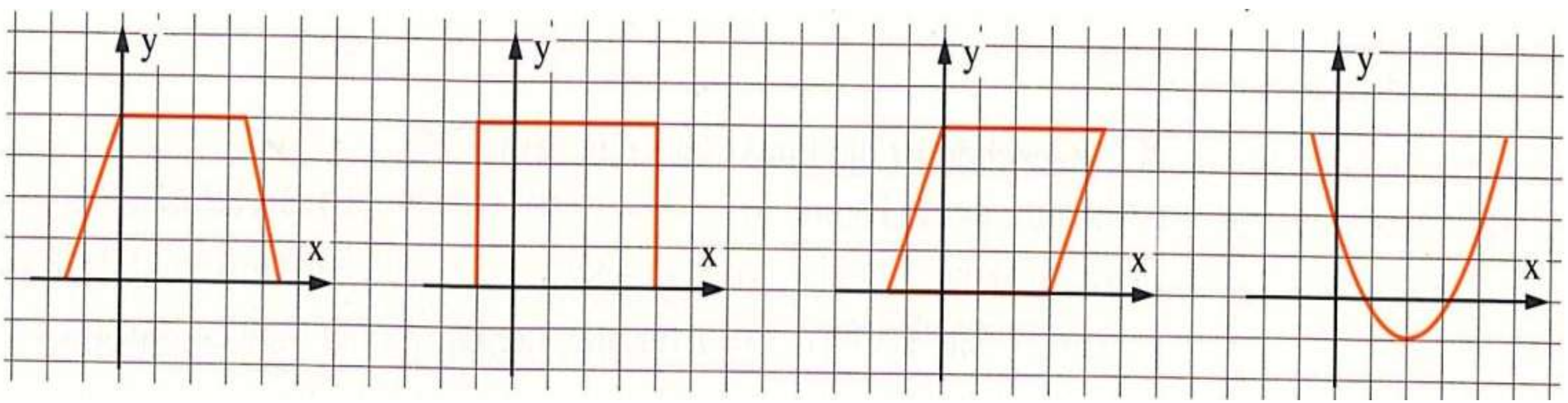
Differenzialrechnung

Zusammenfassung

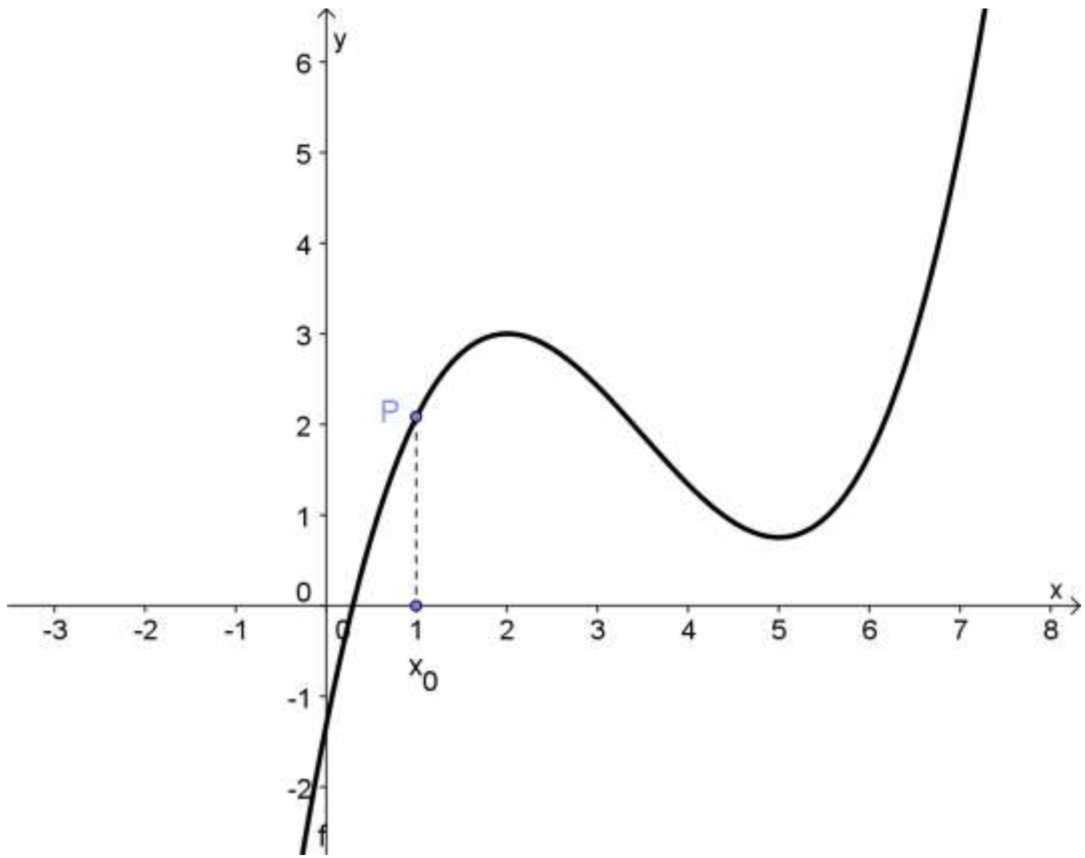
2.1 Funktionen

- Funktion: jeder reellen Zahl x aus einer Definitionsmenge D wird eine ganz bestimmte Größe, der Funktionswert y oder f(x) zugeordnet.



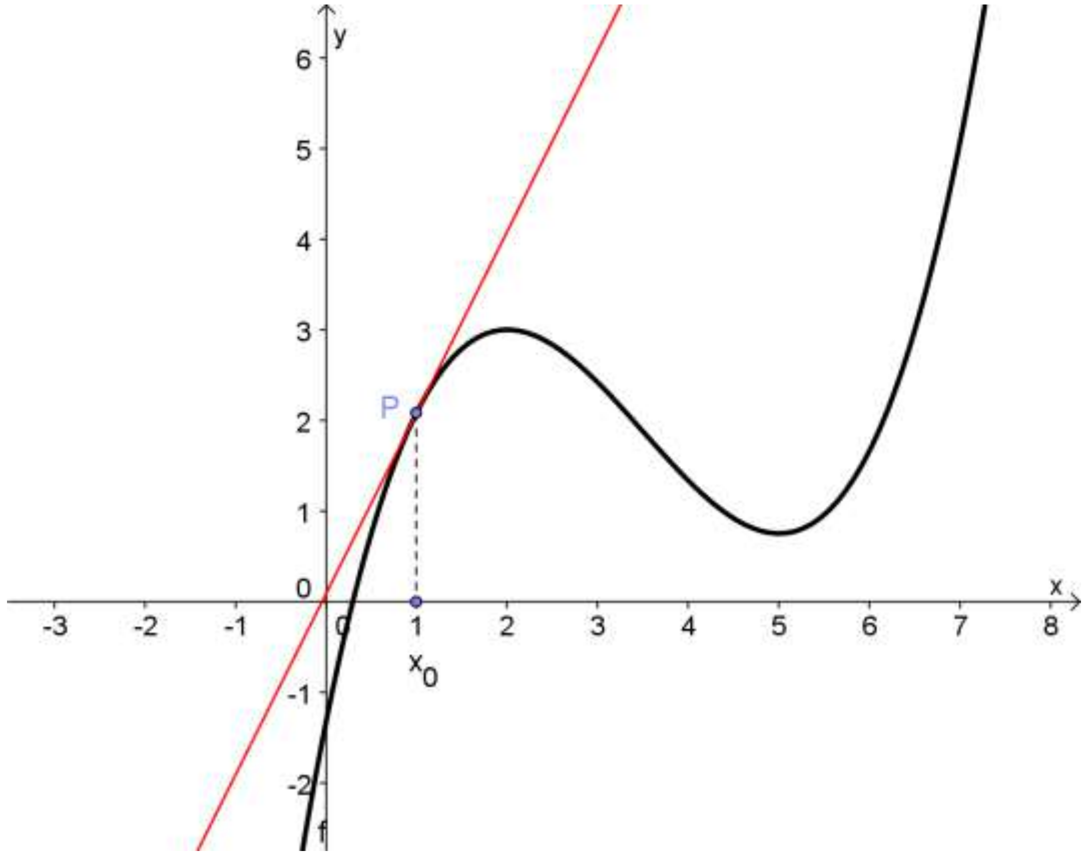
2.1 Funktionen

- Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 5x - \frac{4}{3}$



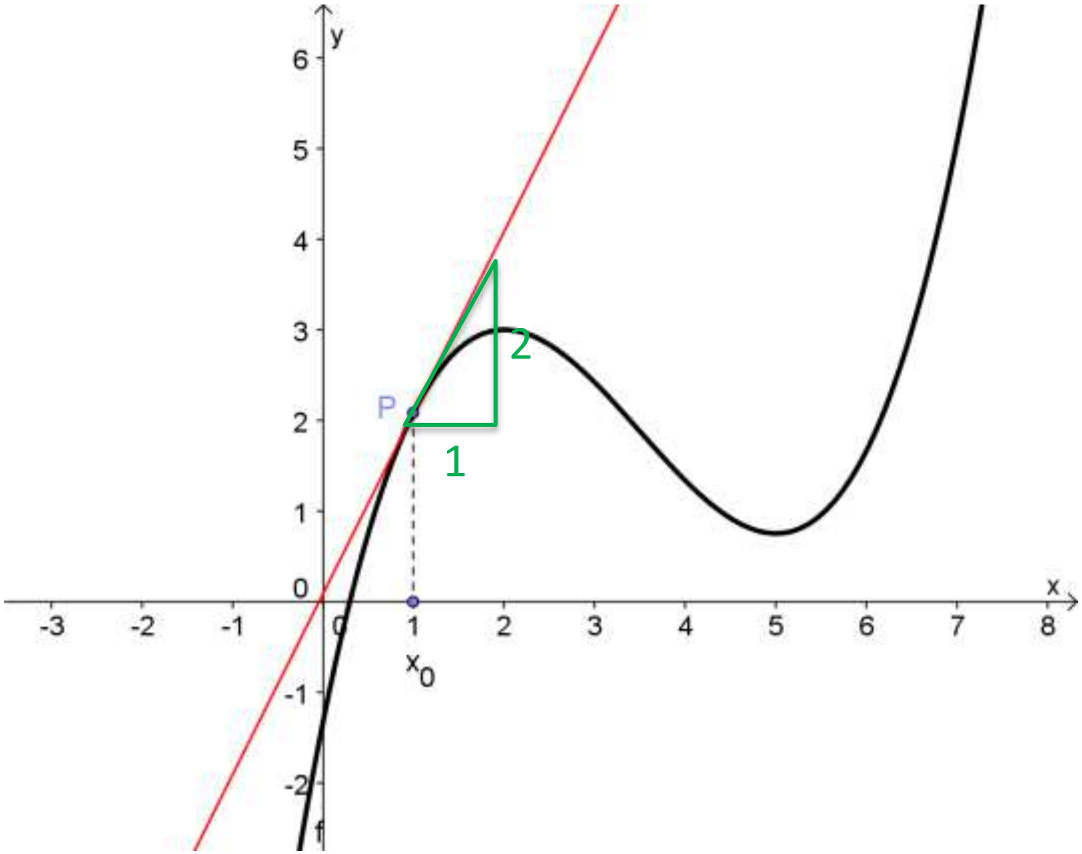
2.2 Ableitung

- Die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 nennt man auch <u>Ableitung</u>, Schreibweise $\boxed{f'(x_0)}$



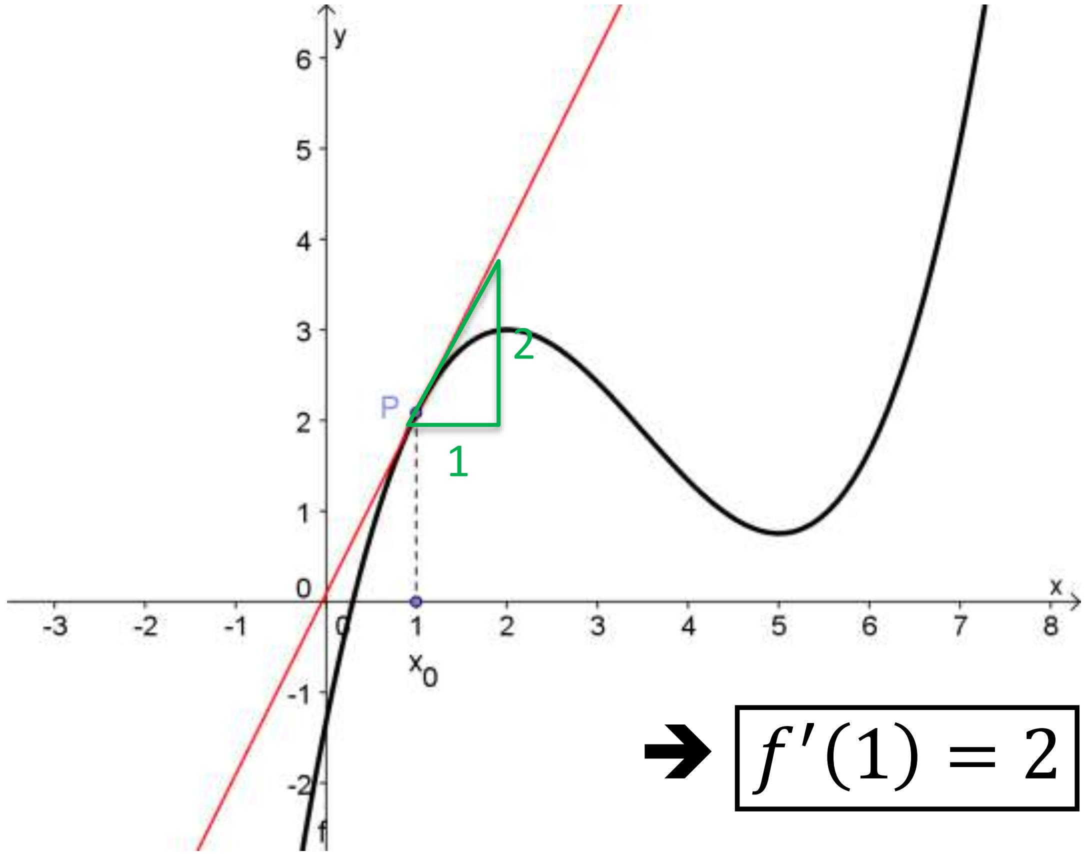
2.2 Ableitung

- Die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 nennt man auch <u>Ableitung</u>, Schreibweise $\boxed{f'(x_0)}$



2.2 Ableitung

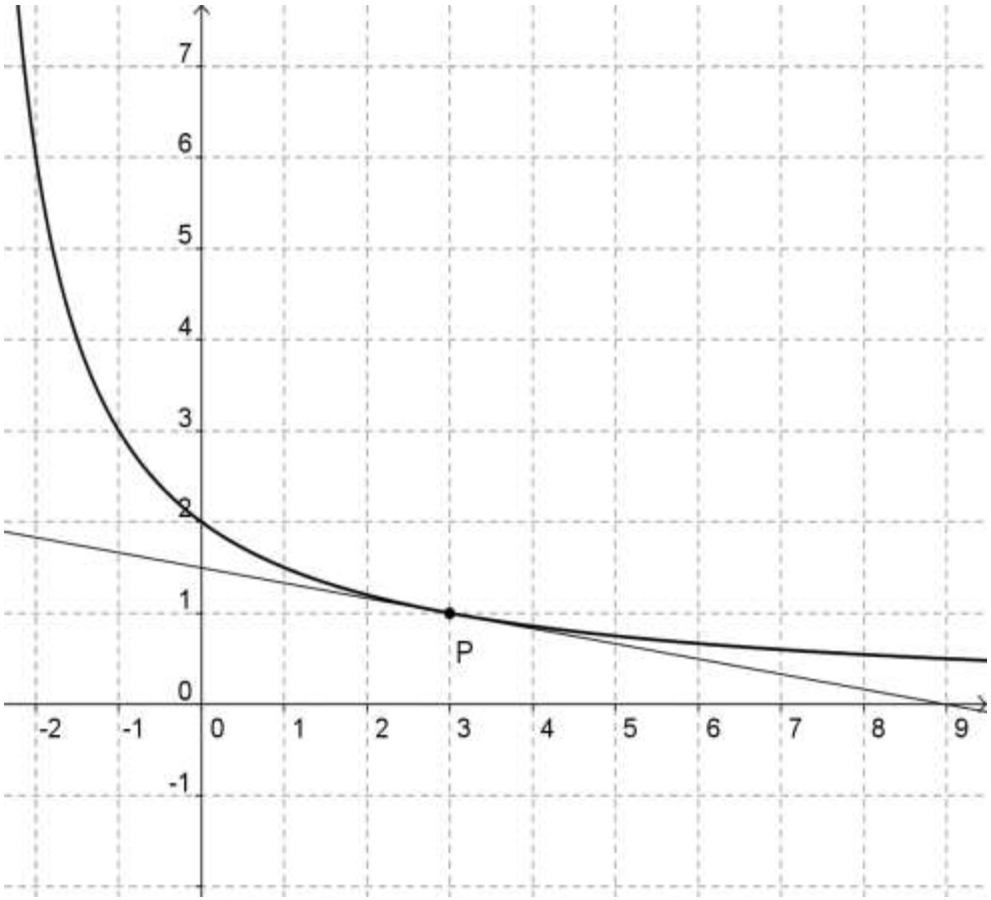
- Die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 nennt man auch <u>Ableitung</u>, Schreibweise $\boxed{f'(x_0)}$



$\Rightarrow$ $\boxed{f'(1) = 2}$

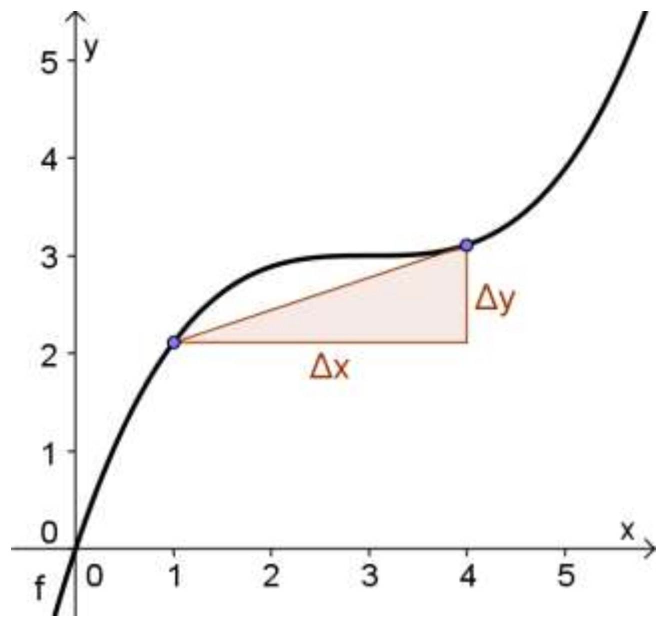
2.2 Ableitung

- Beispiele:



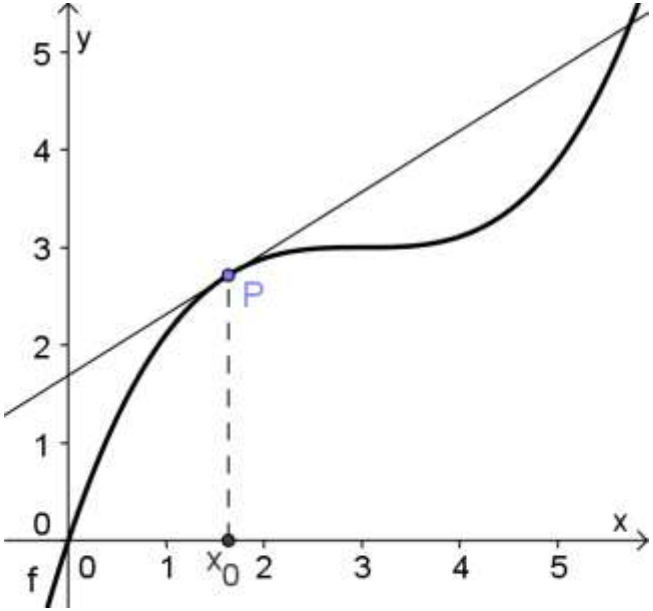
2.3 Interpretation der Ableitung

- Änderungsrate:
  - Änderung der y-Werte Δy **im Intervall** Δx
  - $$\boxed{\ddot{A}nderungsrate = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

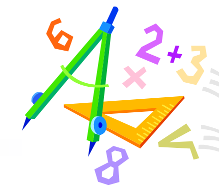


2.3 Interpretation der Ableitung

- Lokale Änderungsrate:
  - Änderungsrate **an einer Stelle $\boldsymbol{x_0}$**
  - = Steigung der Tangente bei x_0
  - $\boxed{Lokale\ Änderungsrate = f'(x_0)}$



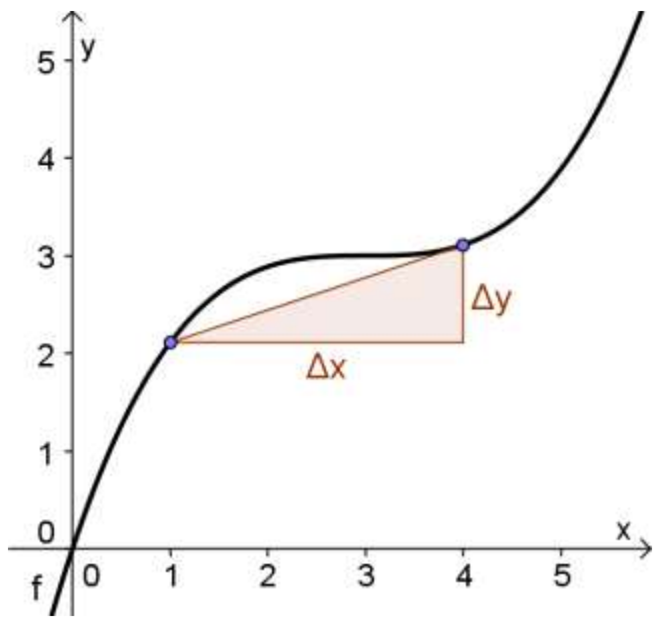
2.3 Interpretation der Ableitung

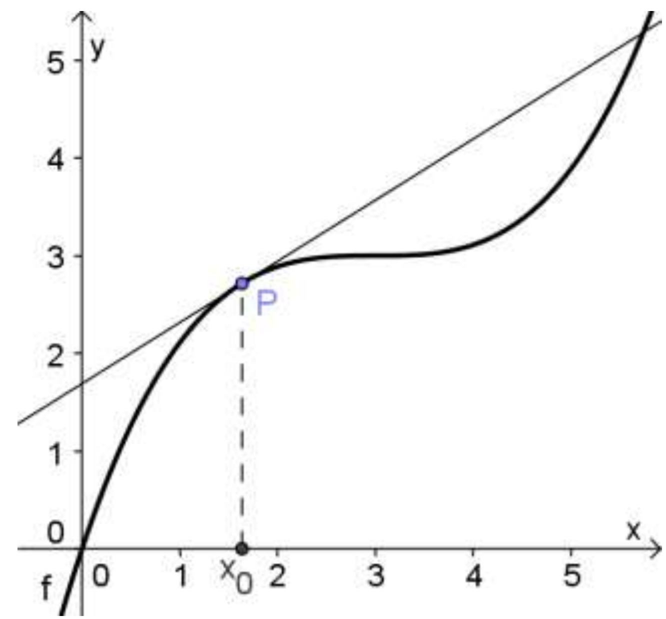


▪ Änderungsrate und lokale Änderungsrate

Die Änderungsrate $\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ gibt an, „wie schnell“ sich die Funktionswerte **im Intervall $\mathbf{\Delta x}$** ändern.

Die lokale Änderungsrate $\boxed{f'(x_0)}$ gibt an, „wie schnell“ sich die Funktionswerte **an einer Stelle $\mathbf{x_0}$** ändern.





2.3 Interpretation der Ableitung

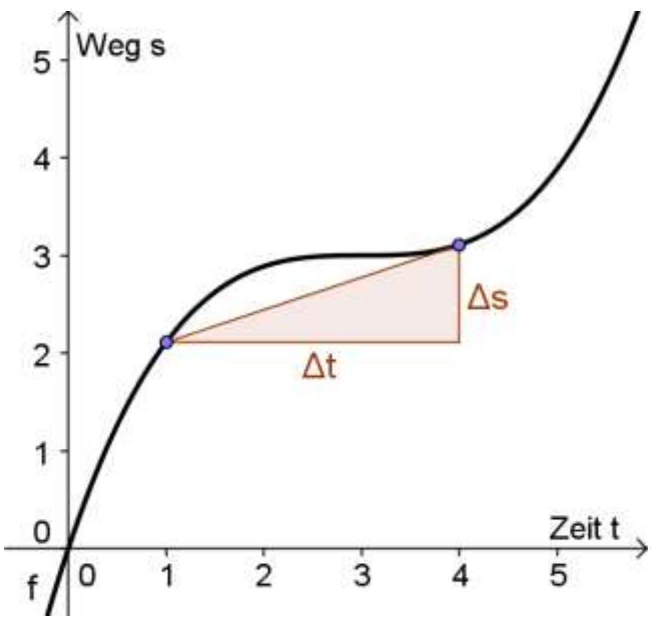
- Weg-Zeit-Diagramm

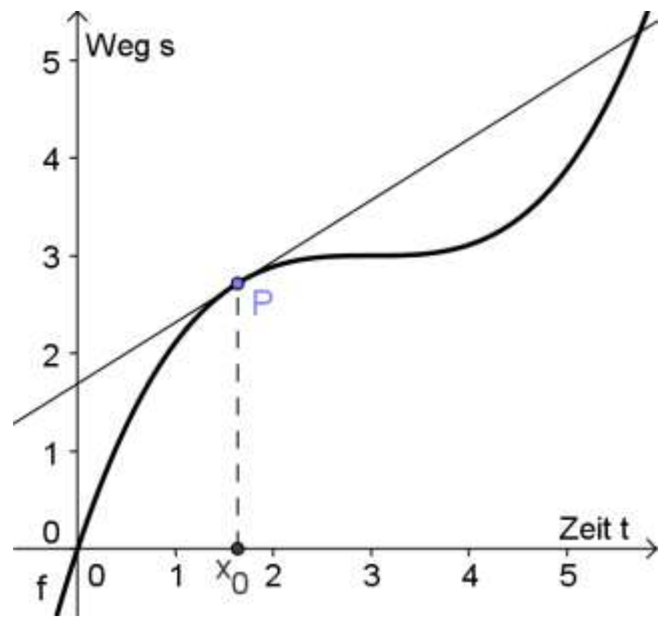
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{Wegdifferenz}{Zeitdifferenz}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit
im Zeitintervall Δt

$$f'(x_0)$$

Momentangeschwindigkeit
zum Zeitpunkt x_0





2.3 Interpretation der Ableitung

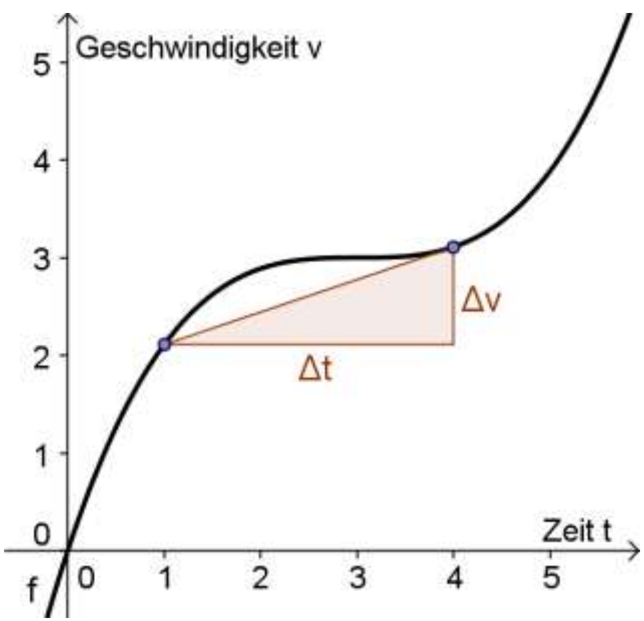
- Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

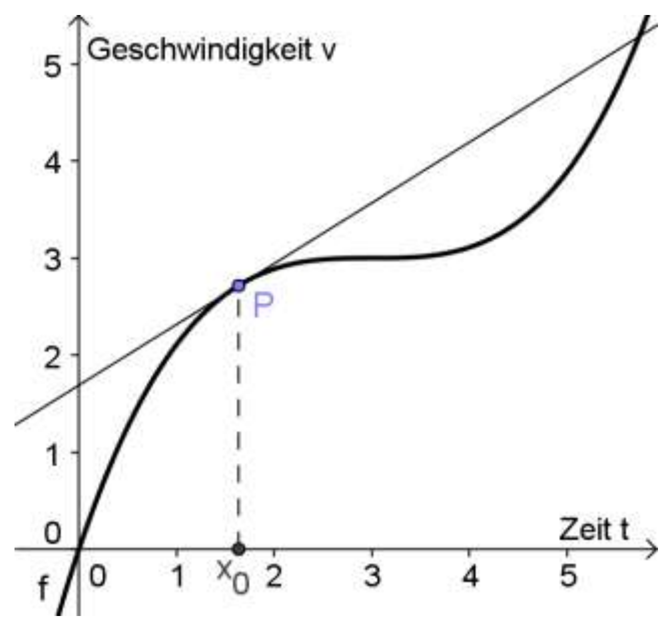
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{Geschw.-differenz}{Zeitdifferenz}$$

Durchschnittsbeschleunigung im Zeitintervall Δt

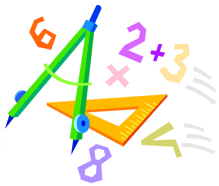
$$f'(x_0)$$

Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt x_0





2.3 Interpretation der Ableitung



- Beispiele für Änderungsraten

x	y bzw. f(x)	Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Lokale Änderungsrate $f'(x_0)$
Zeit	Weg	Durchschnitts-Geschw.	Momentan-Geschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Durchschnitts-Beschl.	Momentan-Beschleunigung
Zeit	Flughöhe		
Zeit	Wassermenge		
Weg	Benzinvolumen		
Höhe	Luftdruck		

2.3 Interpretation der Ableitung

- Beispiele für Änderungsraten

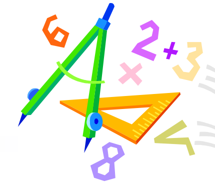
x	y bzw. f(x)	Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Lokale Änderungsrate $f'(x_0)$
Zeit	Weg	Durchschnitts-Geschw.	Momentan-Geschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Durchschnitts-Beschl.	Momentan-Beschleunigung
Zeit	Flughöhe	Durchschnittliche Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit	Momentane Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit
Zeit	Wassermenge		
Weg	Benzinvolumen		
Höhe	Luftdruck		

2.3 Interpretation der Ableitung

- Beispiele für Änderungsraten

x	**y bzw. f(x)**	**Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$**	**Lokale Änderungsrate $f'(x_0)$**
Zeit	Weg	Durchschnitts-Geschw.	Momentan-Geschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Durchschnitts-Beschl.	Momentan-Beschleunigung
Zeit	Flughöhe	Durchschnittliche Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit	Momentane Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit
Zeit	Wassermenge	Durchschnittliche Zuflussgeschwindigkeit	Momentane Zuflussgeschwindigkeit
Weg	Benzinvolumen		
Höhe	Luftdruck		

2.3 Interpretation der Ableitung



- Beispiele für Änderungsraten

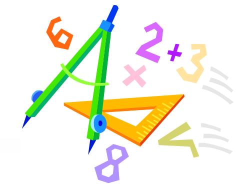
x	y bzw. f(x)	Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Lokale Änderungsrate $f'(x_0)$
Zeit	Weg	Durchschnitts-Geschw.	Momentan-Geschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Durchschnitts-Beschl.	Momentan-Beschleunigung
Zeit	Flughöhe	Durchschnittliche Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit	Momentane Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit
Zeit	Wassermenge	Durchschnittliche Zuflussgeschwindigkeit	Momentane Zuflussgeschwindigkeit
Weg	Benzinvolumen	Durchschnittliche Benzinverbrauch	Momentaner Benzinverbrauch
Höhe	Luftdruck		

2.3 Interpretation der Ableitung

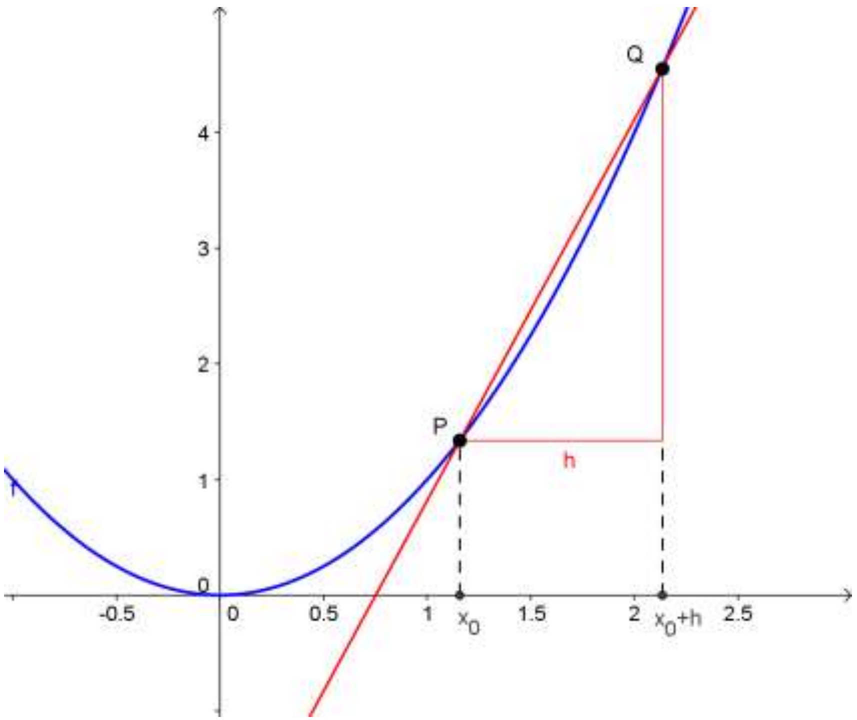
- Beispiele für Änderungsraten

x	y bzw. f(x)	Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Lokale Änderungsrate $f'(x_0)$
Zeit	Weg	Durchschnitts-Geschw.	Momentan-Geschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Durchschnitts-Beschl.	Momentan-Beschleunigung
Zeit	Flughöhe	Durchschnittliche Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit	Momentane Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit
Zeit	Wassermenge	Durchschnittliche Zuflussgeschwindigkeit	Momentane Zuflussgeschwindigkeit
Weg	Benzinvolumen	Durchschnittliche Benzinverbrauch	Momentaner Benzinverbrauch
Höhe	Luftdruck	Durchschnittliche Luftdruckänderung	Momentane Luftdruckänderung

2.4 Ableitung berechnen

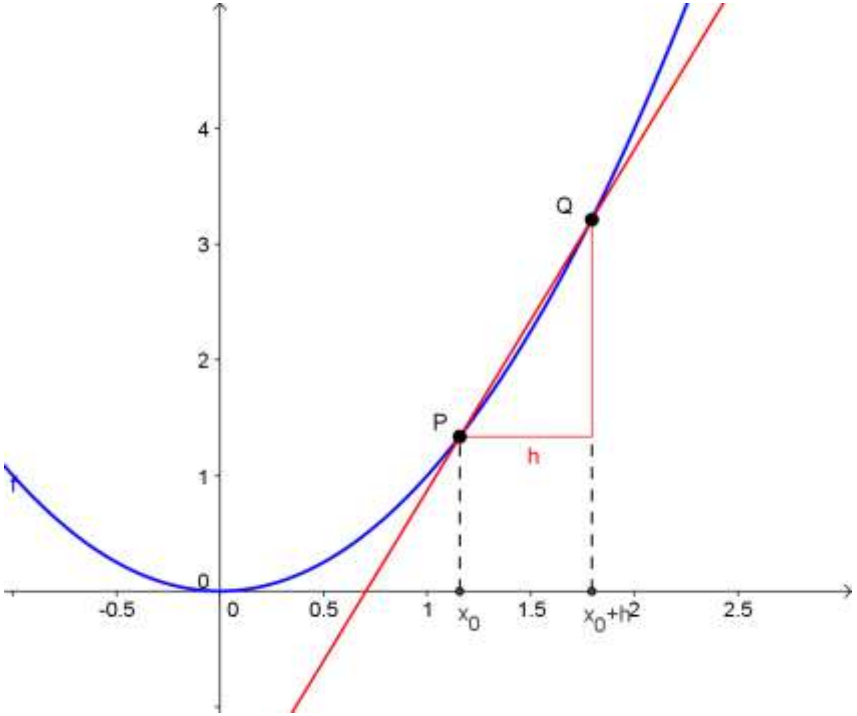


- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$



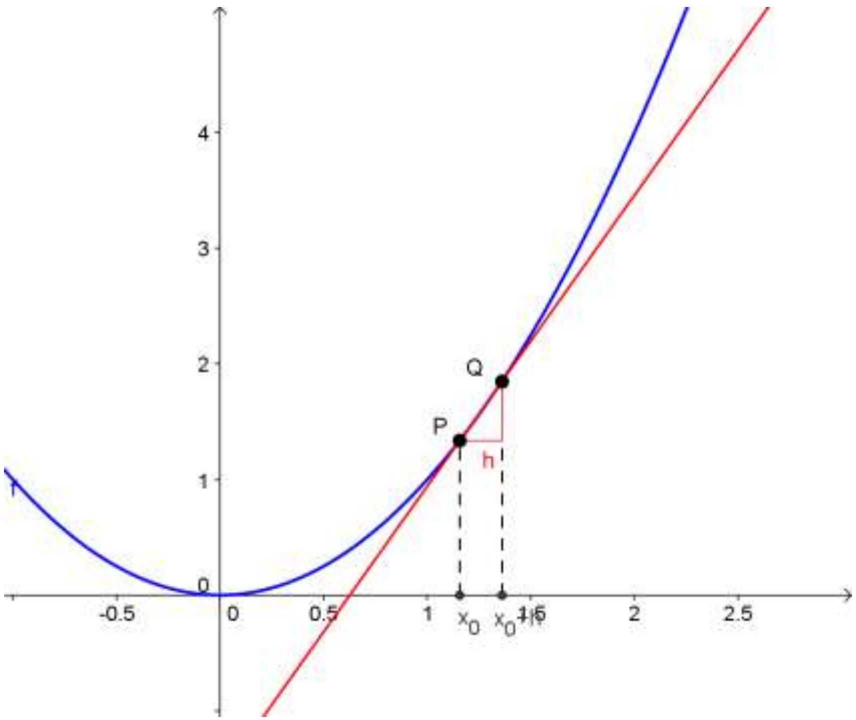
2.4 Ableitung berechnen

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

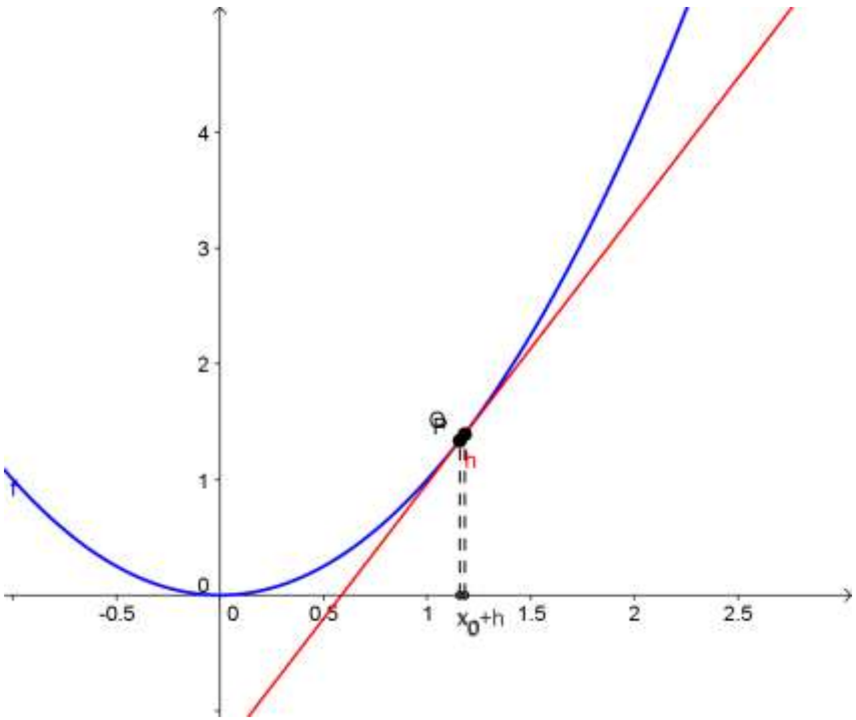


2.4 Ableitung berechnen

- $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$



2.4 Ableitung berechnen



- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- Grenzfall: $h \to 0$

2.5 Ableitungsfunktion

- Formeln für die Ableitung an der Stelle x_0:

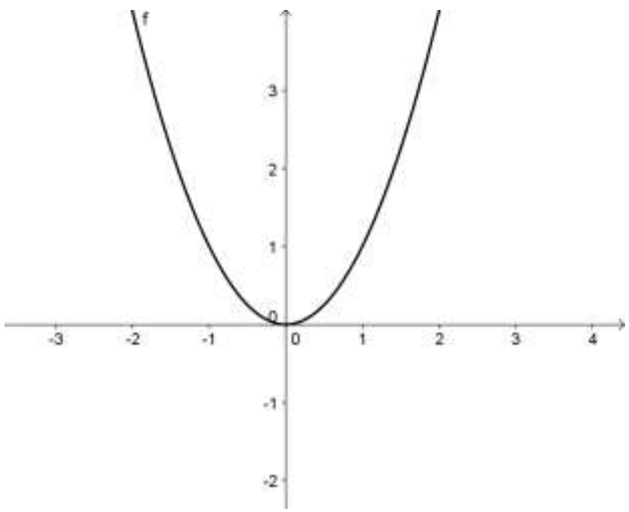
Funktion	Ableitung an der Stelle x_0
$f(x) = x$	$f'(x_0) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x_0) = 2x_0$
$f(x) = x^3$	$f'(x_0) = 3x_0^2$
$f(x) = x^4$	$f'(x_0) = 4x_0^3$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^3}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

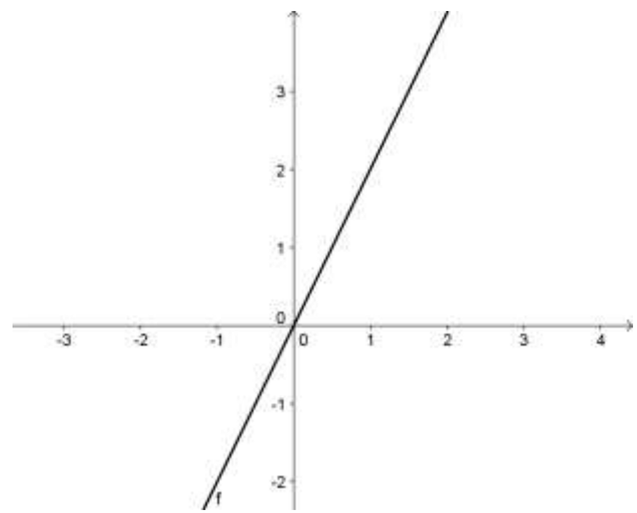
Ableitungsfunktion
$f'(x) = 1$
$f'(x) = 2x$
$f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 4x^3$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.5 Ableitungsfunktion

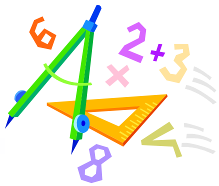
- Die Ableitungsfunktion f' der Ausgangsfunktion f ordnet jeder Stelle x die Ableitung der Ausgangsfunktion f an dieser Stelle zu.

Funktion	Ableitungsfunktion
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$





2.6 Ableitungsregeln



- Potenzregel

Funktion	Ableitungsfunktion
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Die Funktion $f(x) = x^r$ hat die Ableitung $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

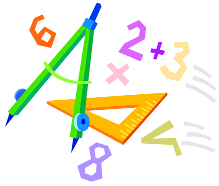
2.6 Ableitungsregeln

- Potenzregel:
  - $f(x) = x^r$ hat die Ableitung $\boxed{f'(x) = r \cdot x^{r-1}}$
  - Beispiel: $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

- Faktorregel:
  - $f(x) = k \cdot g(x)$ hat die Ableitung $\boxed{f'(x) = k \cdot g(x)}$
  - Beispiel: $f(x) = 9x^3 \Rightarrow f'(x) = 9 \cdot 3x^2 = 27x^2$

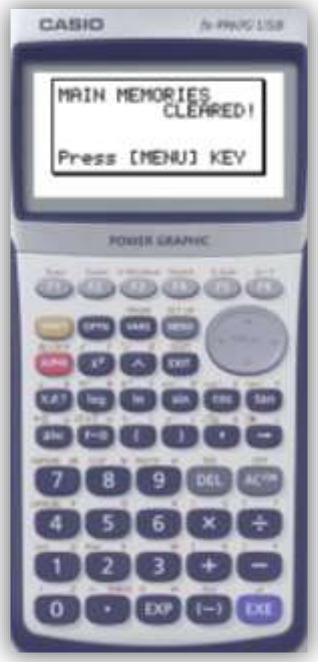
- Summenregel:
  - $f(x) = u(x) + v(x)$ hat die Ableitung $\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$
  - Beispiel: $f(x) = 4x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 1$

2.7 Ableitung mit dem GTR



- Berechnen von $f'(2)$:
  - Funktion f als Y1 eingeben
  - Im RUN-Modus d/dx(Y1,2) über OPTN-Menü eintippen

- Graph von f‘ zeichnen:
  - Funktion f als Y1 eingeben
  - Im GRAPH-Modus Y2=d/dx(Y1,X) über OPTN-Menü eintippen



2.8 Tangente

Gegeben: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$
Gesucht: Tangente $y = m \cdot x + c$ an der Stelle $x_0 = 2$.

- Ableitung und Punkt $P(2|f(2))$ berechnen:
  - $f'(x) = 6x^2 - 10x$
  - $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 = 3 \quad \Rightarrow \quad P(2|3)$
- Steigung m der Tangente über Ableitung bestimmen: $\boxed{m = f'(2)}$
  - $f'(x) = 6x^2 - 10x \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 4$
- y-Achsenabschnitt c der Tangente bestimmen durch Einsetzen
  - $y = m \cdot x + 2$
  - $y = 4 \cdot x + c$ (mit 2.)
  - $3 = 4 \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 3 - 4 \cdot 2 = -5$
- $\Rightarrow y = 4 \cdot x - 5$ ist die Tangente

2.8 Tangente mit Formel

Tangente an die Funktion f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$:

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

- In diesem Fall:
  - $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$
  - $f'(x) = 6x^2 - 10x$
  - $x_0 = 2$
- $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$
- $= 4 \cdot (x - 2) + 3 = 4x - 8 + 3 = 4x - 5$
- $\Rightarrow y = 4 \cdot x - 5$ ist die Tangente!