

# Analysis I - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2004/05, Dr. Schmoeger

- Dreiecksungleichungen und andere Standardsachen sind hier i.d.R nicht aufgeführt!
- Immer nachprüfen, ob Voraussetzungen erfüllt sind!

**Binomialkoeffizient:**  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

**Bernoullische Ungleichung:** Ist  $x \geq -1$ , so gilt  $(1+x)^n \geq 1+nx \forall n \in \mathbb{N}$

**Der binomische Satz:**  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \forall n \in \mathbb{N}$

**Monotoniekriterium für Folgen:**

- $(a_n)$  sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$
- $(a_n)$  sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n=1}^{\infty} a_n$

**Wichtige Folgen:**

- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ )
- $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$  ( $n \rightarrow \infty$ )

**Satz von Bolzano-Weierstraß:**  $(a_n)$  sei eine beschränkte Folge. Dann:  $H(a_n) \neq \emptyset$

**Cauchyfolge (CF):**  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n > m \geq n_0$

**Cauchy-Kriterium:**  $(a_n)$  ist konvergent  $:\Leftrightarrow (a_n)$  ist eine CF.

**Unendliche Reihen:**

- Harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent
- Geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) konvergiert für  $|x| < 1$ . Dann:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  konvergiert gegen  $e$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  konvergiert gegen 1
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  konvergiert absolut  $\forall x \in \mathbb{R}$

**Cauchy-Kriterium:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert  $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \underbrace{\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right|}_{=s_n - s_m} < \varepsilon \forall n > m \geq n_0$

**Monotonie-Kriterium:** Sind alle  $a_n \geq 0$  und ist  $(s_n)$  beschränkt  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert.

**Notwendige Bedingung für Konvergenz:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei konvergent. Dann:  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

**Leibnizkriterium:** Sei  $(b_n)$  eine monoton fallende Nullfolge und  $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ . Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent.

**Majorantenkriterium:** Gilt  $|a_n| \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konv.  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut.

**Minorantenkriterium:** Gilt  $a_n \geq b_n \geq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.

**Wurzelkriterium:** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$  ( $\alpha = \infty$  ist zugelassen).

- (1) Ist  $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut
- (2) Ist  $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert
- (3) Ist  $\alpha = 1$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich

**Quotientenkriterium:** Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  
Es sei  $\alpha_n$  beschränkt,  $\beta := \liminf(\alpha_n)$  und  $\alpha := \limsup |\alpha_n|$

- (1) Ist  $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert
- (2) Ist  $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut
- (3) Ist  $\alpha = \beta = 1$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Produktreihen:** Sind  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergent, so ist die Produktreihe  $\sum p_n$  von beiden absolut konvergent.

**Cauchyprodukt:** Setze  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  heißt Cauchyprodukt

Sind  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergent, so konvergiert ihr Cauchyprodukt  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  gegen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ .

**Sinus und Cosinus:**  $\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$      $\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

**Potenzreihe:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sei eine PR,  $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$  und  $r := \frac{1}{\rho}$  (also  $r = 0$ , falls  $\rho = \infty$  und  $r = \infty$ , falls  $\rho = 0$ )

- (1) Ist  $r = 0$ , so konvergiert die PR nur für  $x=0$
- (2) Ist  $r = \infty$ , so konvergiert die PR absolut  $\forall x \in \mathbb{R}$
- (3) Ist  $0 < r < \infty$ , so konvergiert die PR absolut für  $|x| < r$  und sie divergiert für  $|x| > r$  (im Falle  $|x| = r$ , also für  $x = r$  und  $x = -r$ , ist keine Aussage möglich).

**Sinus- und Cosinushyperbolicus:**

- $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

**Grenzwerte bei Funktionen:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert  $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$  mit: für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x) \rightarrow a$ .

**Cauchy Kriterium:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(x')| < \varepsilon \forall x, x' \in \dot{D}_\delta(x_0)$

**Exponentialfunktion:**  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

**Stetigkeit:**  $f$  heißt stetig in  $x_0 \Leftrightarrow$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

**Beispiele:**

- (1)  $e^x, \sin(x), \cos(x)$  sind auf  $\mathbb{R}$  stetig
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- (4)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \forall x_0 \in \mathbb{R}$

**Zwischenwertsatz:** Sei  $a < b$  und  $f \in C[a, b] := C([a, b])$ . Weiter sei  $y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$  oder  $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$

**Nullstellensatz von Bolzano:** Sei  $f \in C[a, b]$  und  $f(a)f(b) < 0$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$

**Offene / abgeschlossene Mengen:**

- (1)  $A \subseteq \mathbb{R}$  heißt abgeschlossen  $\Leftrightarrow$  für jede konvergente Folge  $(x_n)$  in  $A$  gilt:  $\lim x_n \in A$
- (2)  $B \subseteq \mathbb{R}$  heißt offen  $\Leftrightarrow \forall x \in B \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq B$

**Funktionenfolgen und -Reihen:**

- $(f_n)$  heißt auf  $D$  punktweise konvergent  $\Leftrightarrow$  für jedes  $x \in D$  ist  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$  konvergent.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  heißt auf  $D$  punktweise konvergent  $\Leftrightarrow$  für jedes  $x \in D$  ist  $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$  konvergent.
- $(f_n)$  heißt auf  $D$  gleichmäßig (glm) konvergent  $\Leftrightarrow \exists$  Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \forall x \in D$

- Kriterium nach Weierstraß: Sei  $(c_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ , sei  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergent, sei  $m \in \mathbb{N}$  und es gelte  $|f_n(x)| \leq c_n \forall n \geq m \forall x \in D$ . Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  auf  $D$  glm.

**Gleichmäßige Stetigkeit:**  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(z)| < \varepsilon \forall x, z \in D$  und  $|x - z| < \delta$

- Ist  $D$  beschränkt und abgeschlossen, und  $f$  auf  $D$  stetig, dann ist  $f$  auf  $D$  glm. stetig.

**Lipschitzstetigkeit:**  $\exists L \geq 0 : |f(x) - f(z)| \leq L|x - z| \forall x, z \in D$

**Ableitung / Differenzierbarkeit in  $x_0$ :**  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$  und ist  $\in \mathbb{R}$

**Produktregel:**  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

**Quotientenregel:**  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

**Kettenregel:**  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0)$

**Ableitung der Umkehrfunktion:**  $f \in C(I)$  sei streng monoton,  $f$  sei db in  $x_0 \in I$  und  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  db in  $y_0 := f(x_0)$  und  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

**Satz von Rolle:** es sei  $f(a) = f(b)$ ,  $f$  stetig und db. Dann existiert  $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

**Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung:**  $f$  stetig und db  $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

**Erweiterter Mittelwertsatz:**  $f, g$  stetig und db und  $g(b) \neq g(a) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

**Die Regeln von de l'Hospital:**

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf  $(a, b)$  db und es sei  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  ( $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  zugelassen).

Weiter existiere  $L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ( $L = \pm\infty$  zugelassen) und es gelte

(I)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  oder

(II)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .

Dann  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$  (gilt auch für  $x \rightarrow b$ )

**Additionstheoreme:**  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

**Wichtige Ableitungen:**

- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1$
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

**Abelscher Grenzwertsatz:**  $\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  für  $x \in [-1, 1]$

**Höhere Ableitungen:** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine PR mit KR  $r > 0, I := (x_0 - r, x_0 + r)$

- $f \in C^\infty(I)$
- $\forall x \in I \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k}$

**Taylorreihe:**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

**Taylorpolynom:**  $T_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

**Satz von Taylor:** Sei  $f \in C^n \Rightarrow \exists \xi \in [x, x_0] : f(x) = T_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

**1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

Es sei  $f \in R[a, b]$  und  $f$  besitze auf  $[a, b]$  die SF  $F$ .

Dann  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: [F(x)]_a^b$

**MWS der Integralrechnung:**

Es seien  $f, g \in R[a, b], g \geq 0$  auf  $[a, b], m := \inf f([a, b]), M := \sup f([a, b])$

$$(1) \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx$$

$$(2) \text{ Ist } f \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f dx = f(\xi)(b - a)$$

## 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei  $f \in R[a, b]$  und  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

(1)  $F$  ist auf  $[a, b]$  Lipschitzstetig, insbesondere  $F \in C[a, b]$

(2) Ist  $f$  in  $x_0$  stetig  $\Rightarrow F$  ist in  $x_0$  db und  $F'(x_0) = f(x_0)$

(3) Ist  $f \in C[a, b] \Rightarrow F \in C^1[a, b]$  und  $F' = f$  auf  $[a, b]$

**Partielle Integration:**  $\int_a^b f' g dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f g' dx$

**Substitutionsregel:**  $\int f(g(t))g'(t) dt = \int f(x) dx|_{x=g(t)}$

**Integrale:**

- $\int \frac{1}{x-x_0} dx = \log|x - x_0|$
- $\int \log x dx = x \log x - x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} x$
- $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh} x$

**Cauchy-Kriterium:**  $\int_a^\beta f dx$  konv.  $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c = c(\varepsilon) \in (a, \beta) : |\int_u^v f dx| < \varepsilon \forall u, v \in (c, \beta)$

**Majorantenkriterium:** Ist  $|f| \leq g$  auf  $[a, \beta]$  und  $\int_a^\beta g dx$  konv.  $\Rightarrow \int_a^\beta f dx$  konvergiert absolut

**Minorantenkriterium:** Ist  $|f| \geq g \geq 0$  auf  $[a, b]$  und  $\int_a^\beta g dx$  div.  $\Rightarrow \int_a^\beta f dx$  div.

**Funktionen von beschränkter Variation:**

- Ist  $f$  auf  $[a, b]$  Lipschitzstetig  $\Rightarrow f \in BV[a, b]$
- Ist  $f$  db auf  $[a, b]$  und  $f'$  beschränkt auf  $[a, b] \Rightarrow f \in BV[a, b]$
- Ist  $f$  monoton auf  $[a, b] \Rightarrow f \in BV[a, b]$  und  $v_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$
- Ist  $f \in C^1[a, b] \Rightarrow v_f[a, b] = \int_a^b |f'| dx$

**Partielle RS-Integration:** Ist  $f \in R_g[a, b] \Rightarrow g \in R_f[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g df$

**Riemann-Stieltjes-Integral:**

- Sei  $f \in R[a, b]$ ,  $g$  sei db auf  $[a, b]$  und  $g' \in R[a, b]$ . Dann  $f \in R_g[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx$
- Ist  $f \in C[a, b]$  und  $g \in BV[a, b] \Rightarrow f \in R_g[a, b]$