Analysis II - Formelsammlung

von Julian Merkert, Sommersemester 2005, Dr. Schmoeger

- Dreiecksungleichungen und andere Standardsachen sind hier i.d.R nicht aufgeführt!
- Immer nachprüfen, ob Voraussetzungen erfüllt sind!

Skalarprodukt: $x \cdot y := xy := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$

Norm: $||x|| := (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$

Abstand: $||x - y||$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $|x \cdot y| \leq ||x|| \, ||y||$

Δ-Ungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Bolzano-Weierstraß: Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so enthält $(a^{(k)})$ eine konvergente TF.

Cauchy-Kriterium: $(a^{(k)})$ konvergent $\Leftrightarrow \ \forall \, \varepsilon > 0 \ \exists \, k_0 \in \mathbb{N} : ||a^{(k)} - a^{(l)}|| < \varepsilon \ \forall \, k, l \geq k_0$

Grenzwerte bei Funktionen:

- Sei $y_0 \in \mathbb{R}^m$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 :\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x^{(k)})$ in $D \setminus \{x_0\}$ und $x^{(k)} \to x_0$ gilt: $f(x^{(k)}) \to y_0$
  In diesem Fall schreibt man: $f(x) \to y_0 \ (x \to x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow \ \exists \, y_0 \in \mathbb{R}^m : \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
- Ist $f = (f_1, ..., f_m)$ und $y_0 = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, so gilt: $f(x) \to y_0 \ (x \to x_0) \Leftrightarrow f_j(x) \to y_j \ (x \to x_0) \ (j = 1...m)$

Stetigkeit: Sei $x_0 \in D$. f heißt stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ für jede Folge $(x^{(k)})$ in D mit $x^{(k)} \to x_0$ gilt: $f(x^{(k)}) \to f(x_0)$

Gleichmäßige Stetigkeit: $\forall \, \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0 : ||f(x) - f(y)|| < \varepsilon \ \forall \, x, y \in D : ||x - y|| < \delta$

- D sei beschränkt und abgeschlossen und es sei $f \in C(D, \mathbb{R}^m) \Rightarrow$ f ist auf D glm stetig

Lipschitzstetigkeit: $\exists \, L \geq 0 : ||f(x) - f(y)|| \leq L ||x - y|| \ \forall \, x, y \in D$

Beschränktheit: $\exists \, c \geq 0 : ||f(x)|| \leq c \ \forall \, x \in D$

Partielle Differenzierbarkeit / part. Ableitung in x_0: $\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t e_j) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ und ist $\in \mathbb{R}$.

Satz von Schwarz: Es sei $f \in C^2(D, \mathbb{R}), x_0 \in D$ und $j, k \in \{1, ..., n\}$. Dann: $f_{x_j x_k}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$

Jacobi- / Funktionalmatrix in x_0: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)} := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$

Differenzierbarkeit in x_0: $\exists \ (m \times n)$-Matrix A: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{||h||} = 0$

- f sei in x_0 db $\Rightarrow$ f ist in x_0 partiell db und die Matrix A ist eindeutig bestimmt: $A = J_f(x_0), f'(x_0) := A = J_f(x_0)$ (**Ableitung** von f in x_0)
- Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \Rightarrow$ f ist auf D db.

Kettenregel: f sei in $x_0 \in D$ db, $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$. E sei offen, $f(D) \subseteq E$ und $g : E \to \mathbb{R}^p$ sei db in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ db in x_0 und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ [Matrizenprodukt]

Verbindungsstrecke: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n, S[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$

Mittelwertsatz: $f : D \to \mathbb{R}$ sei db auf D, es seien $a, b \in D$ und $S[a, b] \subseteq D$. Dann:
$\exists \, \xi \in S[a, b] : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

Richtung / Richtungsvektor: $a \in \mathbb{R}^n$ und $||a|| = 1$

Diff'barkeit in x_0 in Richtung a / Richtungsableitung: $\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ und ist $\in \mathbb{R}$

- f in x_0 db $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert und $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \text{grad} \, f(x_0)$

Taylorpolynom: $T_k\left((x,y);(x_0,y_0)\right) := \sum_{i=0}^{k} \frac{((x-x_0,y-y_0)\nabla)^{(i)} f(x_0,y_0)}{i!}$

- $(h\nabla)^{(k)} := \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k$, also insbesondere:
- $(h\nabla)^{(0)} f(x_0) := f(x_0)$
- $(h\nabla) f(x_0) = h \cdot \text{grad}\, f(x_0)$
- $(h\nabla)^{(2)} f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_j h_k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$
- $(h\nabla)^{(3)} f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} h_j h_k h_l \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x_0)$

Der Satz von Taylor: Sei $k \in \mathbb{N}, f \in C^{k+1}(D,\mathbb{R}), x_0 \in D, h \in \mathbb{R}^n$ und $S[x_0, x_0+h] \subseteq D$.
Dann: $f(x_0+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(h\nabla)^{(j)} f(x_0)}{j!} + \frac{(h\nabla)^{k+1} f(\xi)}{(k+1)!}$, wobei $\xi \in S[x_0, x_0+h]$

Quadratische Form zu A: $Q_A(x) := x \cdot (Ax)$

Hesse-Matrix von f in x_0: $H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$

Definitheit:

- A heißt positiv definit (pd) $:\Leftrightarrow Q_A(x) > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A heißt negativ definit (nd) $:\Leftrightarrow Q_A(x) < 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A heißt indefinit (id) $:\Leftrightarrow \; \exists \; n, r \in \mathbb{R}^n : Q_A(n) > 0, Q_A(r) < 0$

Extremwerte: Sei D offen, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$ und grad $f(x_0) = 0$.

- Ist $H_f(x_0)$ pd $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Minimum.
- Ist $H_f(x_0)$ nd $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Maximum.
- Ist $H_f(x_0)$ id $\Rightarrow$ f hat in x_0 kein lokales Extremum.

Umkehrsatz: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei offen, $f \in C^1(D,\mathbb{R}^n), x_0 \in D$ und $\det f'(x_0) \neq 0$.
Dann existiert eine offene Umgebung U von x_0 und eine offene Umgebung V von $f(x_0)$ mit:

(a) f ist auf U injektiv, $f(U) = V$ und $\det f'(x) \neq 0 \; \forall \; x \in U$

(b) Für $f^{-1} : V \to U : f^{-1}$ ist stetig db auf V und $(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1} \; \forall \; x \in U$.

Satz über implizit definierte Funktionen:
Sei $(x_0, y_0) \in D$, D offen, $f(x_0,y_0) = 0$, $f \in C^1(D,\mathbb{R}^p)$ und $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.
Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und genau eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}^p$ mit:

(1) $(x, g(x)) \in D \; \forall \; x \in U$

(2) $g(x_0) = y_0$

(3) $f(x, g(x)) = 0 \; \forall \; x \in U$

(4) $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$

(5) $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \; \forall \; x \in U$

(6) $g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \; \forall \; x \in U$

Multiplikatorenregel von Lagrange:
f habe in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ und es sei Rang $\varphi'(x_0) = p$.
Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p : H'(x_0, \lambda_0) = 0$. ($\lambda_0$ heißt ein Multiplikator)

- H ist für $x = (x_1, .., x_n) \in D$ und $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ folgendermaßen definiert:
  $H(x, \lambda) := f(x) + \lambda\varphi(x) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + ... + \lambda_p\varphi_p(x)$

Weg im $\mathbb{R}^n$: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig heißt Weg.

Weglängenfunktion zu γ: $s(t) := \begin{cases} L(\gamma|_{[a,b]}) & : t \in (a,b] \\ 0 & : t = a \end{cases}$

Länge von γ: $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$, falls γ ein stetig dber Weg.

- Ist s die zu γ gehörende Weglängenfunktion, so ist $s \in C^1[a,b]$ und $s'(t) = ||\gamma'(t)|| \; \forall \; t \in [a,b]$

γ heißt **glatt** $:\Leftrightarrow \gamma$ ist stetig db und $||\gamma'(t)|| > 0 \; \forall \; t \in [a,b]$

Wegintegral von f längs γ: $\int_\gamma f(x) \cdot dx := \int_\gamma f_1(x)dx_1 + ... + f_n(x)dx_n := \int_a^b f_1(\gamma(t))d\gamma_1(t) + ... + \int_a^b f_n(\gamma(t))d\gamma_n(t)$

- γ stetig db $\Rightarrow \int_\gamma f_j(x)dx_j = \int_a^b f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt$ $(j = 1..n)$ und $\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

Integral bezüglich der Weglänge: $\int_\gamma g(x)ds := \int_a^b g(\gamma(t))ds(t)$

- γ stetig db $\Rightarrow \int_\gamma g(x)ds = \int_a^b g(\gamma(t)) \, ||\gamma'(t)||dt$

Stammfunktionen:

- f besitze auf G die SF φ, γ sei ein stückw. stetig dber Weg $\Rightarrow \int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$
- f besitze auf G die SF $\varphi \Rightarrow \int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx = \varphi(y_0) - \varphi(x_0)$
- Sei G sternförmig und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Dann: f besitzt auf G eine SF $\Leftrightarrow$ f erfüllt auf G die IB.
  - Integrabilitätsbedingungen: $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ auf G $(j = 1..n)$
  - Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt sternförmig $:\Leftrightarrow \; \exists \; x_0 \in M : S[x_0, x] \subseteq M \; \forall \; x \in M$

Charakteristische Funktion: $1_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$

Triviale Fortsetzung: $f_A(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Lebesgueintegral von f über A: $\int_A f dx := \int_A f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in C(A, \mathbb{R})$ sei beschränkt. Dann: $f \in L(A)$
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei abgeschlossen und beschränkt und $f \in C(A, \mathbb{R})$. Dann: $f \in L(A)$

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

- Für $y \in \mathbb{R}^m : A_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$
- Für $x \in \mathbb{R}^n : A_x := \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^m$

„Kleiner“ Satz von Fubini:
$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ sei beschränkt und offen (abgeschlossen) und $f \in C(A, \mathbb{R})$ sei beschränkt. Dann:

(1) Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ lebesgueintegrierbar über A_y

(2) Die Funktion $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ ist lebesgueintegrierbar über $\mathbb{R}^m$ und $\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx \right) dy$

(3) analog zu (1), (2): $\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{R^n} \left(\int_{A_x} f(x,y)dy \right) dx$

Einfachheit bzgl. eines Faktors:

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \quad (= \mathbb{R}^n)$.
  A heißt einfach bezüglich des 1. Faktors $(\mathbb{R}^{n-1}) :\Leftrightarrow \; \forall \; x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $A_x = \emptyset$ oder ein Intervall in $\mathbb{R}$.
- Sei $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \quad (= \mathbb{R}^n)$.
  A heißt einfach bezüglich des 2. Faktors $(\mathbb{R}^{n-1}) :\Leftrightarrow \; \forall \; y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $A_y = \emptyset$ oder ein Intervall in $\mathbb{R}$.

$A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 1. Faktors. $B := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : A_x \neq \emptyset \right\}$

(1) $\forall \; x \in B : A_x$ ist ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.

(2) $\forall\ f \in C(A,\mathbb{R}) : \int_A f(x,y)d(x,y) = \int_B \left(\int_{A_x} f(x,y)dy\right) dx$

$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 2. Faktors. $B := \left\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : A_y \neq \emptyset\right\}$

(1) $\forall\ y \in B : A_x$ ist ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.

(2) $\forall\ f \in C(A,\mathbb{R}) : \int_A f(x,y)d(x,y) = \int_B \left(\int_{A_y} f(x,y)dx\right) dy$

n-dim. Volumen / Lebesguemaß von A: $v_n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx = \int_A 1dx$, falls A quadrierbar

Quadrierbarkeit: A heißt **quadrierbar** (qb) $:\Leftrightarrow 1_A \in L(\mathbb{R}^n)$ ($\Leftrightarrow 1 \in L(A)$)

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Ist A offen oder abgeschlossen $\Rightarrow$ A ist qb.

Prinzip von Cavalieri:
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} = \{(x,z) : x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$ beschränkt und abgeschlossen (also qb im $\mathbb{R}^{n+1}$). Dann:

(1) $\forall\ z \in \mathbb{R}$ ist A_z beschränkt und abgeschlossen (also qb im $\mathbb{R}^n$)

(2) $v_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} v_n(A_z)dz$

Satz von Beppo Levi:
Sei (f_k) eine Folge im $L(\mathbb{R}^n)$ mit $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq ...$ auf $\mathbb{R}^n$ und $(\int f_k dx)$ beschränkt.
$f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ sei definiert durch $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$.
Dann: $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim \int f_k dx$ $(= \int(\lim f_k(x)dx))$

Satz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz):
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (f_k) eine Folge in $L(A)$ und (f_k) konvergiere f.ü. auf A punktweise gegen $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$

(1) Ist $F \in L(A)$ und gilt $|f_k| \leq F$ auf A $\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L(A)$ und $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$

(2) Ist A qb und existiert ein $M \geq 0$ mit $(f_k) \leq M$ auf A $\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L(A)$ und
$\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$

Satz von Fubini:
$\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$. Es sei $f \in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(1) $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^m$: für jedes $y \in \mathbb{R}^m \backslash N$ ist $x \mapsto f(x,y)$ lebesgueintegrierbar über $\mathbb{R}^n$.

(2) Mit $F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx & \text{falls } y \in \mathbb{R}^m \backslash N \\ 0 & \text{falls } y \in N \end{cases}$ gilt:
$F \in L(\mathbb{R}^m)$ und $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} F(y)dy$

Substitutionsregel:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $\phi \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ sei auf U injektiv und lipschitzstetig. Es sei $B := \bar{U}$ (B ist beschränkt und abgeschlossen). Dann lässt sich ϕ lipschitzstetig auf B fortsetzen und für $A := \phi(B)$ gilt:
$\int_A f(x)dx = \int_B f(\phi(z))\ |\det \phi'(z)|\ dz\ \forall\ f \in C(A,\mathbb{R})$
(A ist beschränkt und abgeschlossen, i.a. ist auf der Nullmenge ∂U ϕ' nicht erklärt)

Polarkoordinaten (n=2)
$r = ||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \quad (r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi])$
$\Phi(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ \det\Phi'(r,\varphi) = r$

Zylinderkoordinaten (n=3)
$\Phi(r,\varphi,z) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),\ \det\Phi'(r,\varphi,z) = r \qquad (r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi], z \in \mathbb{R})$

Kugelkoordinaten (n=3)
$r = ||(x,y,z)|| = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta$
$r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi], \vartheta \in [0,\pi]$
$\Phi(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta),\ \det\Phi'(r,\varphi,\vartheta) = -r^2\sin\vartheta$