

# Analysis III - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2005/06, Dr. Schmoeger

## Vorbereitungen

**Kreuzprodukt** von  $a, b \in \mathbb{R}^3$ :  $a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

**Rotation** von  $F = (P, Q, R) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ :  $\text{rot } F := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R)$

**Divergenz** von  $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ :  $\text{div } f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$

**Familie** (Menge) von Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R} : \mathcal{F}$

- Punktweise Beschränktheit:  $\forall x \in A \exists c = c(x) \geq 0 : |f(x)| \leq c \forall f \in \mathcal{F}$
- Gleichmäßige Beschränktheit:  $\exists \gamma \geq 0 : |f(x)| \leq \gamma \forall x \in A \forall f \in \mathcal{F}$
- Gleichstetigkeit:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in A$  mit  $|x - y| < \delta$  und  $f \in \mathcal{F}$ .

## Satz von Arzelà-Ascoli:

$A$  sei beschränkt und abgeschlossen,  $\mathcal{F}$  punktweise beschränkt und gleichstetig auf  $A$ ,  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{F}$ . Dann enthält  $(f_n)$  eine Teilfolge, welche auf  $A$  gleichmäßig konvergiert.

**Integralsatz von Gauß:**  $\int_B \text{div } f(x, y) d(x, y) = \int_\gamma (u dy - v dx)$

- bzw.  $\int_B u_x(x, y) d(x, y) = \int_\gamma u(x, y) dy$
- $R : [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$  stetig und stückw. db,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fest
- $\gamma(t) := (x_0 + R(t) \cdot \cos(t), y_0 + R(t) \cdot \sin(t)) \quad (t \in [0, 2\pi])$
- $B := \{(x_0 + r \cdot \cos(t), y_0 + r \cdot \sin(t)) : t \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(t)\}$ ,  $\partial B = \Gamma_\gamma$
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $D \supseteq B$  und  $f(u, v) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$

**Integralsatz von Stokes:**  $\underbrace{\int_\Phi \text{rot } F \cdot n \cdot d\sigma}_{\text{Oberflaechenint.}} = \underbrace{\int_{\Phi \circ \gamma} F(x, y, z) \cdot d(x, y, z)}_{\text{Wegint.}}$

- $\Phi \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  offen,  $S = \Phi(B)$ ,  $S \subseteq G$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\partial B = \Gamma_\gamma$
- $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$
- $\int_\Phi F \cdot n \cdot d\sigma := \int_B F(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) d(u, v)$ : Oberflächenintegral für  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig
- $\int_\Phi f d\sigma := \int_B f(\Phi(u, v)) \cdot \|N(u, v)\| d(u, v)$  für  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  stetig
- $N(u_0, v_0) := \Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$ : Normalenvektor

**Integralsatz von Gauß im  $\mathbb{R}^3$ :**  $\int_V \text{div } F(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\partial V} F \cdot n \cdot d\sigma$

- $V \subseteq \mathbb{R}^3$ : Normalbereich bzgl. aller drei Achsen
  - $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, \varphi^-(x, y) \leq z \leq \varphi^+(x, y)\}$ : Normalbereich bzgl. der z-Achse
  - $\varphi^-, \varphi^+ \in C^1(D, \mathbb{R})$ ,  $\varphi^- \leq \varphi^+$  auf  $B$
- $G \subseteq \mathbb{R}^3$  offen,  $V \subseteq G$  und  $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$
- $N_a(u, v) := \Phi_u^+(u, v) \times \Phi_v^+(u, v)$  auf  $\Phi^+(B)$ ,  $\Phi^+(u, v, \varphi^+(u, v))$ : äußere Normale  
 $N_a(u, v) := -(\Phi_u^-(u, v) \times \Phi_v^-(u, v))$  auf  $\Phi^-(B)$ ,  $\Phi^-(u, v, \varphi^-(u, v))$ : äußere Normale
- $\int_\Phi F \cdot n_a \cdot d\sigma := \int_{\tilde{B}} F(\Phi(t, z)) \cdot N_a(t, z) d(t, z)$
- $\tilde{B} := \{(t, z) : t \in [0, 2\pi], \varphi^-(\gamma(t)) \leq z \leq \varphi^+(\gamma(t))\}$

## Differentialgleichungen allgemein

**Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung:**  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

- $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{n+1 \text{ Faktoren}}$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion

**Lösung einer gewöhnlichen DGL:** Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit...

- (i)  $y$  auf  $I$   $n$ -mal db
- (ii)  $\forall x \in I : (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D$
- (iii)  $\forall x \in I : F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

**Explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung:**  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

- $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$

**Lösung einer expliziten DGL:**  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit...

- (i)  $y$  auf  $I$   $n$ -mal db
- (ii)  $\forall x \in I : (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D$
- (iii)  $\forall x \in I : y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

**Anfangswertproblem:** Gleichungssystem  $\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$

- $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$  fest

**Lösung des AWP:**  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit:  $y$  ist Lösung der expliziten DGL und  $y^{(j)}(x_0) = y_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ )

**Eindeutige Lösbarkeit**  $\Leftrightarrow$  das AWP hat eine Lösung und für je zwei Lösungen  $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $y_1 = y_2$  auf  $I_1 \cap I_2$  ( $I_1, I_2$ : Intervalle in  $\mathbb{R}$ )

## Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

**Lineare DGL 1. Ordnung:**  $y' = a(x) \cdot y + s(x)$  mit  $a, s : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

- AWP  $\begin{cases} y' = a(x) \cdot y + s(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- Falls  $s \equiv 0 \Rightarrow$  DGL homogen, andernfalls inhomogen

**Sätze zu Differentialgleichungen 1. Ordnung:**

- (i)  $y$  ist eine Lösung von (H)  $y' = a(x) \cdot y$  auf  $J \subseteq I$  Intervall  $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : y(x) = c \cdot e^{A(x)}$ 
  - $A(x)$  ist Stammfunktion von  $a$ , existiert nach Analysis I
- (ii) Für  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  hat das homogene AWP auf  $I$  genau eine Lösung
- (iii) Das inhomogene AWP ist auf  $I$  eindeutig lösbar, die Lösung ist  $y = y_h + y_s$

**Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung:**

1. Lösung der homogenen Gleichung (H)  $y' = a(x) \cdot y : \exists c \in \mathbb{R} : y_h(x) = c \cdot e^{A(x)}$   
( $A(x)$ : Stammfunktion von  $a(x)$ )
2. Spezielle Lösung der inhomogenen GL (IH)  $y' = a(x) \cdot y + s(x)$ : Variation der Konstanten
  - Ansatz:  $y_s(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$

- Einsetzen und Umformen ergibt GL der Form  $c'(x) = e^{-A(x)} \cdot s(x)$
- Integration von  $c'(x)$  liefert  $y_s(x)$

3. Lösung der DGL:  $y = y_h + y_s$

4. Das AWP ist eindeutig lösbar, die Lösung erhält man durch Einsetzen der Randbedingungen.

### Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

**DGL mit getrennten Veränderlichen:**  $y' = g(y) \cdot f(x)$  mit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

- AWP  $\begin{cases} y' = g(y) \cdot f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- $I, J$ : Intervalle in  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in J$
- Satz: Das AWP ist eindeutig lösbar, die Lösung erhält man durch Auflösen der Gleichung  $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t) dt$

**Lösungsverfahren** für DGLn mit getrennten Veränderlichen: Trennung der Veränderlichen (TDV):

1. Schreibe die DGL in der Form  $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
2. TDV:  $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c$
3. Lösung der DGL durch Auflösen nach  $y = y(x, c)$ , zur Lösung des AWP  $c$  der Bedingung  $y(x_0) = y_0$  anpassen.

### Einige Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

- Setze  $u := \frac{y}{x}$ , dies führt auf eine DGL mit getrennten Veränderlichen für  $u$ .

**Bernoullische DGL:**  $y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^\alpha = 0$ ,  $p, q$  stetig und  $0 \neq \alpha \neq 1$

- Dividiere durch  $y^\alpha$  und setze  $u := y^{1-\alpha}$ . Dies führt auf eine lineare DGL für  $u$ .

**Riccatische DGL:**  $y' + g(x) \cdot y + h(x) \cdot y^2 = k(x)$ ,  $g, h, k$  stetig

1. Sei  $y_1$  eine bekannte Lösung der DGL. Setze  $z := \frac{1}{y - y_1}$
2. Es gilt dann:  $z' = (g(x) + 2 \cdot y_1 \cdot h(x)) \cdot z + h(x)$ , lineare DGL für  $z$  (\*)
3. Allgemeine Lösung:  $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ , wobei  $z$  die allgemeine Lösung von (\*) durchläuft.

### Exakte Differentialgleichungen

**Exaktheit** der DGL  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ :  $(P, Q)$  besitzt auf  $D$  eine Stammfunktion

- $P, Q \in C(D, \mathbb{R})$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$

**Satz:**  $y$  ist eine Lösung der Gleichung  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x, y(x)) = c \forall x \in I$

- $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall,  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $(x, y(x)) \in D \forall x \in I$ , die Gleichung ist auf  $D$  exakt und  $F$  sei eine Stammfunktion von  $(P, Q)$  auf  $D$

### Lösungsverfahren für exakte Differentialgleichungen:

1. Untersuche DGL auf Exaktheit: falls  $P_y = Q_x$ , das Gebiet sternförmig und  $P, Q \in C^1$  ist, existiert die Stammfunktion und die DGL ist exakt
2. Bestimmte Stammfunktion  $F(P, Q)$  mit  $F_x = P, F_y = Q$
3. Es gilt:  $y(x)$  ist Lösung der DGL  $:\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x, y(x)) = c \forall x \in I$ . Auflösen nach  $y(x)$  liefert die Lösung.

**Multiplikator** einer ex. DGL:  $\mu \in C(D, \mathbb{R})$  und  $\mu(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in D$  mit  $(\mu P)dx + (\mu Q)dy = 0$  ist auf  $D$  exakt

- kann nicht exakte DGLs exakt machen
- Falls  $D$  sternförmig,  $P, Q \in C^1(D, \mathbb{R})$ :  $\mu$  Multiplikator  $:\Leftrightarrow (\mu P)_y = (\mu Q)_x$  auf  $D$
- Hängt  $f := \frac{1}{Q}(P_y - Q_x)$  nur von  $x$  ab, so ist  $\mu(x) := e^{\int f(x) dx}$  ein Multiplikator  
Hängt  $f := \frac{1}{P}(P_y - Q_x)$  nur von  $y$  ab, so ist  $\mu(y) := e^{\int f(y) dy}$  ein Multiplikator
- Lösung: Suche Stammfunktion der neuen Gleichung und rechne wie oben, die Lösungen beider Gleichungen stimmen überein

### Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

**Norm**  $\|\cdot\|$  eines Vektorraums  $\mathcal{X}$ : Abbildung  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (i)  $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathcal{X}, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \forall \alpha \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{X}$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$   $\Delta$ -Ungleichung

**Konvergenz** einer Folge  $(x_n)$ :  $\exists x \in \mathcal{X} : \|x_n - x\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

**Eigenschaften einer Menge**  $A \subseteq \mathcal{X}$ :

- $A$  heißt **konvex**  $:\Leftrightarrow$  aus  $x, y \in A$  und  $t \in [0, 1]$  folgt stets  $x + t(y - x) \in A$
- $A$  heißt **beschränkt**  $:\Leftrightarrow \exists c \geq 0 : \|x\| \leq c \forall x \in A$
- $A$  heißt **abgeschlossen**  $:\Leftrightarrow$  der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus  $A$  gehört zu  $A$
- $A$  heißt **kompakt**  $:\Leftrightarrow$  jede Folge in  $A$  enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu  $A$  gehört
- $(x_n)$  heißt **Cauchyfolge**  $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \forall n, m \geq n_0$

**Kontrahierend**:  $T : A \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $\exists L \in [0, 1] : \|Tx - Ty\| \leq L \cdot \|x - y\| \forall x, y \in A$

**Banach-Raum / vollständiger Raum**:  $\mathcal{X}$ :  $\mathcal{X}$  normierter Raum mit: jede Cauchyfolge in  $\mathcal{X}$  ist konvergent

**Operator** auf  $A \subseteq \mathcal{X}$ : Abbildung  $T : A \rightarrow \mathcal{X}$

- Schreibweise:  $Tx$  statt  $T(x)$
- **Fixpunkt**:  $x^* \in A$  mit  $Tx^* = x^*$
- **Stetigkeit von  $T$  in  $x_0$** : für jede Folge  $(x_n)$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0 : Tx_n \rightarrow Tx_0$   
 $- \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon \forall x \in U_\delta(x_0) \cap A$
- **Stetigkeit von  $T$  auf  $A$** :  $T$  ist stetig in jedem  $x \in A$
- $T$  heißt **kontrahierend**  $:\Leftrightarrow \exists L \in [0, 1] : \|Tx - Ty\| \leq L \cdot \|x - y\| \forall x, y \in A$

**Fixpunktsatz von Banach:**  $\mathcal{X}$  sei ein Banach-Raum,  $A \subseteq \mathcal{X}$  sei abgeschlossen,  $T : A \rightarrow \mathcal{X}$  sei kontrahierend und es sei  $T(A) \subseteq A$ . Dann hat  $T$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in A$ . Sei  $x_0 \in A$  beliebig und  $x_{n+1} := Tx_n$  ( $n \geq 0$ ). Dann:

- (i)  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $x_n \rightarrow x^*$
- (iii)  $\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| \forall n \in \mathbb{N}_0$  ( $x_n$  heißt Folge der sukzessiven Approximation)

**Fixpunktsatz von Schauder:**  $\mathcal{X}$  sei ein normierter Raum,  $A \subseteq \mathcal{X}$  sei konvex und kompakt und  $T : A \rightarrow \mathcal{X}$  sei stetig und  $T(A) \subseteq A$ . Dann hat  $T$  einen Fixpunkt.

#### Der Existenzsatz von Peano

**Integralgleichung:**  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$  ( $x \in I$ )

- AWP  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall

**Satz:**

- (i)  $y$  ist die Lösung einer Integralgleichung auf  $I \Leftrightarrow y$  ist eine Lösung des Anfangswertproblems  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- (ii) Ist  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  definiert durch  $(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ , so gilt:  $y$  ist eine Lösung des obigen Anfangswertproblems  $\Leftrightarrow Tu = u$

**Existenzsatz von Peano I:** Das AWP  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  mit  $f \in C(S, \mathbb{R})$  beschränkt hat eine Lösung auf  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$

- $S := I \times \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$

**Existenzsatz von Peano II:** Das AWP  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  mit  $f \in C(R, \mathbb{R})$  hat eine Lösung auf  $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$

- $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$
- $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$ ,  $M := \max \{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$

**Existenzsatz von Peano III:** Es ex.  $\delta > 0$ : das AWP  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  mit  $f \in C(D, \mathbb{R})$  hat eine Lösung  $y : K \rightarrow \mathbb{R}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

#### Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

**Lipschitzbedingung** bezüglich  $y$  auf  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ :  $\exists \gamma \geq 0 : |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq \gamma \cdot |y - \bar{y}| \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in D$

**Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf I:** Das AWP hat  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  mit der Funktion  $f \in C(S, \mathbb{R})$  die auf  $S$  einer Lipschitzbedingung bzgl.  $y$  genügt hat auf  $I = [a, b]$  genau eine Lösung, gegen die die Folge der sukzessiven Approximationen  $(z_n)$  konvergiert.

- $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $S := I \times \mathbb{R}$
- $z_0 \in C(I)$  beliebig und  $z_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t)) dt$ , ( $x \in I$ ), also  $z_{n+1} = Tz_n$

**Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf II:** Das AWP  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  mit der Funktion  $f \in C(R, \mathbb{R})$  die auf  $R$  einer Lipschitzbedingung bezüglich  $y$  genügt hat auf  $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$  genau eine Lösung. Iterative Ermittlung der Lösung wie bei Picard-Lindelöf I.

- $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$
- $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$  und  $f \in C(R, \mathbb{R})$
- $M := \max \{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$

**Lokale Lipschitzbedingung** bzgl.  $y$ :  $\forall (x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen  $\exists$  Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$  mit:  $U \subseteq D$  und  $f$  genügt auf  $U$  einer LB bzgl.  $y$

**Satz:**  $f$  partiell db nach  $y$  auf  $D$  und  $f_y \in C(D, \mathbb{R}) \Rightarrow f$  genügt auf  $D$  einer lokalen LB bzgl.  $y$

**Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf III:** Das AWP  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  mit einer Funktion  $f \in C(D, \mathbb{R})$  die auf  $D$  einer lokalen LB bzgl.  $y$  genügt ist eindeutig lösbar

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $(x_0, y_0) \in D$

### Matrizenwertige Funktionen

**Vektorraum aller  $(m \times m)$ -Matrizen:**  $\mathbb{M}_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$

- $\dim \mathbb{M}_m = m^2$
- $a^{(k)}$ :  $k$ -te Spalte von  $A \in \mathbb{M}_m$ ,  $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)})$
- $\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + \bar{A})$ ,  $\operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - \bar{A})$
- Eigenwert von  $A$ :  $\lambda \in \mathbb{K}$  mit:  $\exists x \in \mathbb{K}^m$ ,  $x \neq 0$ :  $Ax = \lambda x$  ( $x$ : Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ )
- Charakteristisches Polynom von  $A$ :  $p(\lambda) := \det(A - \lambda E)$  ( $E$ : Einheitsmatrix)
- Algebraische Vielfachheit des EWs  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ :  $q$  mit  $\lambda_0$  ist  $q$ -fache Nullstelle von  $p$

**Matrixwertige Funktion:**  $A(x) = (a_{jk}(x)) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{pmatrix}$

**Exponentialfunktion:**  $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  ( $A \in \mathbb{M}_m$ )

- $e^0 = E$ ,  $\overline{e^A} = e^{\bar{A}}$
- Falls  $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- Für  $A \in \mathbb{M}_m$ ,  $\Phi(x) := e^{xA}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist  $\Phi$  auf  $\mathbb{R}$  db und  $\Phi'(x) = A \cdot e^{xA} = e^{xA} \cdot A$

### Existenz- und Eindeigkeitssätze für Systeme 1. Ordnung

**System von DGLn 1. Ordnung:**  $\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, \dots, y_m) \end{cases}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion
- Setze  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , das AWP sei  $(A) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- Peano und Picard-Lindelöf gelten entsprechend wie im Eindimensionalen

## Lineare Systeme

**Lineares System:** DGL-System 
$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1m}(x)y_m + b_1(x) \\ \vdots \\ y_m' = a_{m1}(x)y_1 + \dots + a_{mm}(x)y_m + b_m(x) \end{cases}$$

- $m \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $D := I \times \mathbb{R}^m$ ,  $a_{jk}, b_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

**Lineares System** (Kurzschreibweise): (S)  $y' = A(x)y + b(x)$

- $A(x) := (a_{jk}(x))$ ,  $b(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x))$ ,  $y := (y_1, \dots, y_m)$
- AWP (A)  $\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

**Satz:** (A) hat genau eine Lösung, (S) hat eine Lösung auf  $I$

**Lösung** von (S):  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m : \Leftrightarrow \exists y_h : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $y_h$  löst (H)  $y' = A(x)y$  auf  $I$  und  $y = y_h + y_s$

- $y_s$ : spezielle Lösung von (S) auf  $I$ .

$\mathbb{L} := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^m : y \text{ löst (H) auf } I\}$

**Lösungssystem** von (H):  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)} \in \mathbb{L}$

**Lösungsmatrix** von (H):  $Y(x) := (y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)) \in \mathbb{M}_m$

**Satz:**

- $Y(x)' = A(x) \cdot Y(x) \quad \forall x \in I$
- $\{Yc : c \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{L}$

**Wronskideterminante:**  $W(x) := \det Y(x) \quad (x \in I)$

- $W(x) = W(\xi) \cdot e^{\int_{\xi}^x \text{Spur } A(t) dt} \quad \forall x \in I \quad (\xi \in I)$

**Fundamentalsystem** von (H):  $y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x) \in \mathbb{L}$  linear unabhängig

- Dann heißt  $Y$  Fundamentalmatrix
- $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ist ein FS von (H)  $\Leftrightarrow Y(x)$  ist invertierbar  $\forall x \in I \Leftrightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow W(\xi) \neq 0$  für ein  $\xi \in I$
- $Y$  FM von (H) und  $Z : I \rightarrow \mathbb{M}_m$  Funktion.  $Z$  FM von (H)  $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{M}_m : C$  ist invertierbar,  $C = \overline{C}$  und  $Z(x) = Y(x)C \quad \forall x \in I$

**Spezielle Lösung** von (IH)  $y' = A(x)y + b(x)$ :  $y_s(x) := Y(x) \int (Y(x))^{-1} b(x) dx$

- bzw.  $y_s(x) = \sum_{k=1}^m \left( \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx \right) y^{(k)}(x)$
- $W_k(x) := \det (y^{(1)}(x), \dots, y^{(k-1)}(x), b(x), y^{(k+1)}(x), \dots, y^{(m)}(x))$

## Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

**Lineares System mit konstanten Koeffizienten:** (S)  $y' = Ay + b(x)$  mit  $A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}$ ,  $a_{jk} \in \mathbb{C}$  konstant und  $b : I \rightarrow \mathbb{C}^m$  stetig

- AWP (A)  $\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{C}^m$

**Satz:**

- (i) (A) hat auf  $I$  genau eine Lösung
- (ii)  $e^{xA}$  ist eine FM von (H)  $y' = Ay$

**Lösungsverfahren** für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten (einfache Eigenwerte):

1. Bestimme die Eigenwerte  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$  (char. Polynom  $\det(A - \lambda E)$  Null setzen)
2. Berechne die zu den Eigenwerten  $\lambda_j$  gehörenden Eigenvektoren  $c^{(j)} \in \text{Kern}(A - \lambda_j E)$ , d.h. löse das Gleichungssystem  $(A - \lambda_j E) \cdot x = 0$  ( $j = 1 \dots m$ )
3. Es sei  $y^{(j)}(x) := e^{\lambda_j x} c^{(j)}$ . Dann ist  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ein komplexes Fundamentalsystem von (H).
4.  $\text{Re } y^{(1)}, \dots, \text{Re } y^{(l)}, \text{Im } y^{(1)}, \dots, \text{Im } y^{(l)}, y^{(2l+1)}, \dots, y^{(m)}$  ist reelles Fundamentalsystem von (H) falls  $A$  reell, wobei  $y^{(1)}, \dots, y^{(l)}$  die komplexen Eigenwerte und  $y^{(2l+1)}, \dots, y^{(m)}$  die reellen sind

**Lösungsverfahren** für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten:

1. Bestimme  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  paarw. verschiedene Eigenwerte von  $A$  und  $q_1, \dots, q_k$  deren Vielfachheiten (char. Polynom  $\det(A - \lambda E)$  Null setzen)
2. Für jeden Eigenwert  $\lambda$  mit Vielfachheit  $q$ :
  - Berechne zugehörigen Eigenraum:  $c^{(1)}, \dots, c^{(\nu)}$  l.u.  $\in \text{Kern}(A - \lambda E)^q$
  - $y^{(j)}(x) := e^{\lambda x}(c^{(j)} + x(A - \lambda E)c^{(j)} + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda E)^2 c^{(j)} + \dots + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}(A - \lambda E)^{q-1} c^{(j)})$ ,  $j = 1 \dots \nu$  sind l.u. Lösungen von (H)
3.  $\text{Re } y^{(1)}, \dots, \text{Re } y^{(l)}, \text{Im } y^{(1)}, \dots, \text{Im } y^{(l)}, y^{(2l+1)}, \dots, y^{(m)}$  ist reelles Fundamentalsystem von (H) falls  $A$  reell, wobei  $y^{(1)}, \dots, y^{(l)}$  die komplexen Eigenwerte und  $y^{(2l+1)}, \dots, y^{(m)}$  die reellen sind

**Spezielle Lösung** von (IH)  $y' = Ay + b(x)$ :

1. Ansatz:  $y_s(x) = c_1(x)y^{(1)}(x) + \dots + c_m(x)y^{(m)}(x)$  ( $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  FS von (H))
2. Einsetzen in (IH)

Lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung**Lineare DGL m-ter Ordnung:**  $y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ 

- $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b \in C(I, \mathbb{R}), I \subseteq \mathbb{R}$

**Lineare DGL m-ter Ordnung** (Kurzschreibweise):  $Ly = b(x)$ 

- $Ly := y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$
- Gleichung homogen  $:\Leftrightarrow b \equiv 0$
- AWP:  $\begin{cases} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$

**Lösungsverfahren** für DGLn m-ter Ordnung:

1. Bestimme Lösung  $\hat{y} : I \rightarrow \mathbb{R}$  von (H)  $Ly = 0$
2. Bestimme spezielle Lösung  $y_s$  der Gleichung  $Ly = b$ :  $y_s := \sum_{k=1}^m y_k \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx$

- Wronski-Determinante:  $W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$

- $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{L} = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} : y \text{ löst (H) auf } I\}$  Fundamentalsystem, also l.u.
- $W_k(x)$ : die Determinante, die aus  $W(x)$  entsteht indem man in  $W(x)$  die k-te Spalte durch  $(0, \dots, 0, b(x))^T$  ersetzt

### Reduktionsverfahren nach d'Alembert ( $m = 2$ ):

1.  $y_1$  sei Lösung von (\*)  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ ,  $y_1(x) \neq 0 \forall x \in I$
2.  $z$  sei Lösung von  $z' = -\left(a_1(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}\right) \cdot z$ ,  $z \neq 0$
3.  $y_2(x) := y_1(x) \cdot \int z(x) dx$
4.  $y_1, y_2$  ist ein FS von (\*)

### Lineare DGL m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $Ly := y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$

- $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$
- Satz: Das AWP  $\begin{cases} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$  hat auf  $I$  genau eine Lösung
- Charakteristisches Polynom von (H)  $Ly = 0$ :  $p(\lambda) := \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ 
  - z.B.  $a''' + 2y'' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 1$  ( $y$  geht in 1 über!)

### Lösungsverfahren für lineare DGLn m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

1.  $\lambda_0$  sei eine q-fache Nullstelle von  $p$ . Dann sind  $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{q-1}e^{\lambda_0 x}$  l.u. Lösungen von (H)  $\Rightarrow$  (komplexes) Fundamentalsystem von (H) durch Anwendung auf alle Nullstellen von  $p$
2. Falls  $\lambda$  komplex: nur eine Lösung bestimmen (nicht auch die der konjugiert komplexen) und anschließend in Real- und Imaginärteil aufspalten
3. Bestimme spezielle Lösung  $y_s$  von (IH)  $Ly = b(x)$ :
  - $y_s(x) = x^q e^{\alpha x} [(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n) \cos(\beta \cdot x) + (B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n) \sin(\beta \cdot x)]$
  - $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $n, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $b$  von der Form  $b(x) = (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)e^{\alpha x} \cos(\beta \cdot x)$  oder  $b(x) = \dots \sin(\beta \cdot x)$
  - $\alpha + i\beta$  q-fache Nullstelle von  $p$  ist Voraussetzung (aber „0-fache Nullstelle“  $\mu \in \mathbb{C}$  auch erlaubt, d.h. wenn  $p(\mu) \neq 0$ )

### Die Euler'sche Differentialgleichung

#### Eulersche DGL: $x^m y^{(m)} + a_{m-1}x^{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1xy' + a_0y = b(x)$

- $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$

### Lösungsverfahren für Euler'sche Differentialgleichungen:

1. Substituiere  $x = e^t$  und setze  $u(t) := y(e^t) = y(x)$
2.  $\Rightarrow u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1u' + b_0u = b(e^t)$  lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, wie oben lösbar
3. Setze in die allg. Lösung dieser Gleichung  $t = \log x$

### Nicht fortsetzbare Lösungen

#### Anfangswertproblem (A) $\begin{cases} y' = f(x, y) & f : D \rightarrow \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

#### Menge aller Lösungen von (A): $\mathcal{L}_{(A)}$

**Fortsetzung** von  $u \in \mathcal{L}_{(A)} : v \in \mathcal{L}_{(A)}$  mit  $I_u \subseteq I_v$  und  $u = v$  auf  $I_u$

- $I_y$ : Definitionsintervall von  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$

**Nicht Fortsetzbarkeit** von  $v \in \mathcal{L}_{(A)} : \Leftrightarrow$  aus  $y \in \mathcal{L}_{(A)}$  und  $v$  Fortsetzung von  $y$  folgt  $I_v = I_y$

**Satz:** Sei  $u \in \mathcal{L}_{(A)}$ . Dann existiert ein  $v \in \mathcal{L}_{(A)} : v$  ist eine nicht fortsetzbare Fortsetzung von  $u$  („Maximale Fortsetzung“)

**Satz:** Sei  $D$  offen,  $f \in C(D, \mathbb{R})$ ,  $f$  sei auf  $D$  partiell db nach  $y$  und  $f_y \in C(D, \mathbb{R})$ . Dann hat (A) eine eindeutig bestimmte nicht fortsetzbare Lösung  $y : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}$

### Minimal- und Maximallösung

**Maximallösung** von (A):  $y^* \in \mathcal{L}_{(A)}$  mit  $y \leq y^*$  auf  $I_y \cap I_{y^*} \forall y \in \mathcal{L}_{(A)}$

**Minimallösung** von (A):  $y_* \in \mathcal{L}_{(A)}$  mit  $y \geq y_*$  auf  $I_y \cap I_{y_*} \forall y \in \mathcal{L}_{(A)}$

**Lösungstrichter** von (A):  $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y_*(x) \leq y \leq y^*(x)\}$

**Existenzsätze:**

- (i) Das AWP (A) hat eine Maximallösung  $y^* : I \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Minimallösung  $y_* : I \rightarrow \mathbb{R}$
- (ii) Sei  $(\sigma, \tau) \in T$ . Dann existiert eine Lösung  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  von (A) auf  $I$  mit  $v(\sigma) = \tau$ .

### Ober- und Unterfunktion

**Unterfunktion** bezüglich (A):  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  db mit  $v'(x) < f(x, v(x)) \forall x \in I$  und  $v(x_0) \leq y_0$

**Oberfunktion** bezüglich (A):  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  db mit  $w'(x) > f(x, w(x)) \forall x \in I$  und  $v(x_0) \geq y_0$

**Satz:**  $v$  sei eine Unterfunktion bzgl. (A),  $w$  sei eine Oberfunktion bzgl. (A) und  $y$  sei eine Lösung des AWP (A) auf  $I$ . Dann:  $v < y < w$  auf  $I_0$ .

### Stetige Abhängigkeit

**Stetige Abhängigkeit:** Sei  $(f_n)$  eine Folge in  $C(D, \mathbb{R})$ ,  $(x_n)$  eine Folge in  $I$ ,  $(\eta_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $M \geq 0$ . Es gelte:

- (a)  $|f_n(x, y)| \leq M, |\eta_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N} \forall (x, y) \in D$
- (b)  $(f_n)$  konvergiere auf  $R := I \times [-(b-a+1)M, (b-a+1)M]$  gleichmäßig gegen  $f$
- (c) Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  sei  $y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des AWP  $\begin{cases} y' = f_n(x, y) \\ y(x_n) = \eta_n \end{cases}$ . Dann:
  - (1)  $(y_n)$  enthält eine auf (I) glm. konvergente TF  $(y_{n_k})$  und für  $y(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}(x)$  gilt:  $y'(x) = f(x, y(x))$
  - (2) Gilt  $x_n \rightarrow x (x \in I)$  und  $\eta_k \rightarrow y_0$  und hat (A) auf  $I$  genau eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so konvergiert  $(y_n)$  auf  $I$  glm. gegen  $y$

### Zwei Eindeutigkeitssätze

**Satz von Nagumo:**

Es gelte  $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \frac{|y - \tilde{y}|}{|x - x_0|} \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D$  mit  $x \neq x_0$ . Dann hat (A) höchstens eine Lösung auf  $I$ .

**Satz von Osgood:**

Es sei  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $> 0$  auf  $(0, \infty)$ ,  $t_0 > 1$  und das eigentliche Integral  $\int_0^{t_0} \frac{dn}{\varphi(n)}$  sei divergent. Weiter gelte:  $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \varphi(|y - \tilde{y}|) \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D$  mit  $y \neq \tilde{y}$ . Dann hat (A) auf  $I$  höchstens eine Lösung.

## Randwertprobleme

**Randwertproblem:**  $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_a, \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_b \end{cases}$  mit  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^2, I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$

**Green'sche Funktion:**  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G(x, t) := \begin{cases} t(x-1) & \text{falls } 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(t-1) & \text{falls } 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}$

**Dirichlet-Randwertproblem:** (R)  $\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

- $(Ty)(x) := \int_0^1 G(x, t) f(t, y(t)) dt$
- Satz:  $y$  löst (R) auf  $[0, 1] : \Leftrightarrow Ty = y$

**Satz von Lettenmeyer:**  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $L \geq 0, |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ . Ist  $L < \pi^2$ , so hat (R) auf  $[0, 1]$  genau eine Lösung.

**Satz von Scorza-Dragoni:**  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, D := I \times \mathbb{R}, f \in C(D, \mathbb{R})$  sei auf  $D$  beschränkt. Dann hat das RWP  $\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$  eine Lösung auf  $I$ .

- Satz:  $A > 0, 0 < B < \pi^2, f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  und es gelte  $|f(x, y)| \leq A + B|y|$ . Dann hat das Dirichlet-RWP (R) eine Lösung auf  $[0, 1]$