Analysis III - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2005/06, Dr. Schmoeger

Vorbereitungen

Kreuzprodukt von $a, b \in \mathbb{R}^3$: $a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

Rotation von $F = (P, Q, R) \in C^1(D, \mathbb{R}^3),\ D \subseteq \mathbb{R}^3$: $\text{rot } F := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R)$

Divergenz von $f = (f_1, ..., f_n) \in C^1(D, \mathbb{R}^n),\ D \subseteq \mathbb{R}^n$: $div f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$

Familie (Menge) von Funktionen $f : A \to \mathbb{R} : \mathcal{F}$

- Punktweise Beschränktheit: $\forall\ x \in A\ \exists\ c = c(x) \geq 0 : |f(x)| \leq c\ \forall\ f \in \mathcal{F}$
- Gleichmäßige Beschränkheit: $\exists\ \gamma \geq 0 : |f(x)| \leq \gamma\ \forall\ x \in A\ \forall\ f \in \mathcal{F}$
- Gleichstetigkeit: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall\ x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ und $f \in \mathcal{F}$.

Satz von Arzelà-Ascoli:
A sei beschränkt und abgeschlossen, $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt und gleichstetig auf A, (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$. Dann enhält (f_n) eine Teilfolge, welche auf A gleichmäßig konvergiert.

Integralsatz von Gauß: $\int_B div\ f(x, y)\ d(x, y) = \int_\gamma (u\ dy - v\ dx)$

- bzw. $\int_B u_x(x, y)\ d(x, y) = \int_\gamma u(x, y)\ dy$
- $R : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$ stetig und stückw. db, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fest
- $\gamma(t) := (x_0 + R(t) \cdot \cos(t),\ y_0 + R(t) \cdot \sin(t)) \quad (t \in [0, 2\pi])$
- $B := \{(x_0 + r \cdot \cos(t), y_0 + r \cdot \sin(t)) :\ t \in [0, 2\pi],\ 0 \leq r \leq R(t)\}\ ,\ \partial B = \Gamma_\gamma$
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $D \supseteq B$ und $f(u, v) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$

Integralsatz von Stokes: $\underbrace{\int_\Phi \text{rot } F \cdot n \cdot d\sigma}_{Oberflaechenint.} = \underbrace{\int_{\Phi \circ \gamma} F(x, y, z) \cdot d(x, y, z)}_{Wegint.}$

- $\Phi \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S = \Phi(B)$, $S \subseteq G$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$, $\partial B = \Gamma_\gamma$
- $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$
- $\int_\Phi F \cdot n \cdot d\sigma := \int_B F(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v)\ d(u, v)$: Oberflächenintegral für $F : S \to \mathbb{R}^3$ stetig
- $\int_\Phi f\ d\sigma := \int_B f(\Phi(u, v)) \cdot ||N(u, v)||\ d(u, v)$ für $f : S \to \mathbb{R}$ stetig
- $N(u_0, v_0) := \Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$: Normalenvektor

Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^3$: $\int_V div\ F(x, y, z)\ d(x, y, z) = \int_{\partial V} F \cdot n \cdot d\sigma$

- $V \subseteq \mathbb{R}^3$: Normalbereich bzgl. aller drei Achsen
  - $V := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B,\ \varphi^-(x, y) \leq z \leq \varphi^+(x, y)\right\}$: Normalbereich bzgl. der z-Achse
  - $\varphi^-, \varphi^+ \in C^1(D, \mathbb{R}),\ \varphi^- \leq \varphi^+$ auf B
- $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $V \subseteq G$ und $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$
- $N_a(u, v) := \Phi_u^+(u, v) \times \Phi_v^+(u, v)$ auf $\Phi^+(B)$, $\Phi^+(u, v, \varphi^+(u, v))$: äußere Normale
  $N_a(u, v) := -(\Phi_u^-(u, v) \times \Phi_v^-(u, v))$ auf $\Phi^-(B)$, $\Phi^-(u, v, \varphi^-(u, v))$: äußere Normale
- $\int_\Phi F \cdot n_a \cdot d\sigma := \int_{\tilde{B}} F(\Phi(t, z)) \cdot N_a(t, z)\ d(t, z)$
- $\tilde{B} := \{(t, z) : t \in [0, 2\pi],\ \varphi^-(\gamma(t)) \leq z \leq \varphi^+(\gamma(t))\}$

Differentialgleichungen allgemein

Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

- $n, p \in \mathbb{N},\ D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times ... \times \mathbb{R}^p}_{n+1\ Faktoren}$ und $F : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion

Lösung einer gewöhnlichen DGL: Funktion $y : I \to \mathbb{R}^p$ mit...

(i) y auf I n-mal db

(ii) $\forall\ x \in I : (x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \in D$

(iii) $\forall\ x \in I : F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$

Explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

- $n, p \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times ... \times \mathbb{R}^p}_{n\ Faktoren}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$

Lösung einer expliziten DGL: $y : I \to \mathbb{R}^\varphi$ mit...

(i) y auf I n-mal db

(ii) $\forall\ x \in I : (x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)) \in D$

(iii) $\forall\ x \in I : y^{(n)}(x) = f(x, y(x), ..., y^{(n-1)}(x))$

Anfangswertproblem: Gleichungssystem $\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$

- $(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in D$ fest

Lösung des AWP: $y : I \to \mathbb{R}^p$ mit: y ist Lösung der expliziten DGL und $y^{(j)}(x_0) = y_j \quad (j = 1, ..., n-1)$

Eindeutige Lösbarkeit :$\Leftrightarrow$ das AWP hat eine Lösung und für je zwei Lösungen $y_1 : I_1 \to \mathbb{R},\ y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ gilt: $y_1 = y_2$ auf $I_1 \cap I_2 \quad (I_1, I_2$: Intervalle in $\mathbb{R})$

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lineare DGL 1. Ordnung: $y' = a(x) \cdot y + s(x)$ mit $a, s : I \to \mathbb{R}$ stetig

- AWP $\begin{cases} y' = a(x) \cdot y + s(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- Falls $s \equiv 0 \Rightarrow$ DGL homogen, andernfalls inhomogen

Sätze zu Differentialgleichungen 1. Ordnung:

(i) y ist eine Lösung von (H) $y' = a(x) \cdot y$ auf $J \subseteq I$ Intervall :$\Leftrightarrow$ $\exists\ c \in \mathbb{R} : y(x) = c \cdot e^{A(x)}$
   - $A(x)$ ist Stammfunktion von a, existiert nach Analysis I

(ii) Für $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ hat das homogene AWP auf I genau eine Lösung

(iii) Das inhomogene AWP ist auf I eindeutig lösbar, die Lösung ist $y = y_h + y_s$

Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung:

1. Lösung der homogenen Gleichung (H) $y' = a(x) \cdot y$: $\exists\ c \in \mathbb{R} : y_h(x) = c \cdot e^{A(x)}$
   ($A(x)$: Stammfunktion von $a(x)$)
2. Spezielle Lösung der inhomogenen GL (IH) $y' = a(x) \cdot y + s(x)$: Variation der Konstanten
   - Ansatz: $y_s(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$

- Einsetzen und Umformen ergibt GL der Form $c'(x) = e^{-A(x)} \cdot s(x)$
- Integration von $c'(x)$ liefert $y_s(x)$

3. Lösung der DGL: $y = y_h + y_s$
4. Das AWP ist eindeutig lösbar, die Lösung erhält man durch Einsetzen der Randbedingungen.

Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

DGL mit getrennten Veränderlichen: $y' = g(y) \cdot f(x)$ mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig

- AWP $\begin{cases} y' = g(y) \cdot f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- I, J: Intervalle in $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$
- Satz: Das AWP ist eindeutig lösbar, die Lösung erhält man durch Auflösen der Gleichung $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$

Lösungsverfahren für DGLn mit getrennten Veränderlichen: Trennung der Veränderlichen (TDV):

1. Schreibe die DGL in der Form $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
2. TDV: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + c$
3. Lösung der DGL durch Auflösen nach $y = y(x, c)$, zur Lösung des AWP c der Bedingung $y(x_0) = y_0$ anpassen.

Einige Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$y' = f(\frac{y}{x})$

- Setze $u := \frac{y}{x}$, dies führt auf eine DGL mit getrennten Veränderlichen für u.

Bernoullische DGL: $y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^{\alpha} = 0$, p, q stetig und $0 \neq \alpha \neq 1$

- Dividiere durch y^{α} und setze $u := y^{1-\alpha}$. Dies führt auf eine lineare DGL für u.

Riccatische DGL: $y' + g(x) \cdot y + h(x) \cdot y^2 = k(x)$, g, h, k stetig

1. Sei y_1 eine bekannte Lösung der DGL. Setze $z := \frac{1}{y - y_1}$
2. Es gilt dann: $z' = (g(x) + 2 \cdot y_1 \cdot h(x)) \cdot z + h(x)$, lineare DGL für z (*)
3. Allgemeine Lösung: $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$, wobei z die allgemeine Lösung von (*) durchläuft.

Exakte Differentialgleichungen

Exaktheit der DGL $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$: (P, Q) besitzt auf D eine Stammfunktion

- $P, Q \in C(D, \mathbb{R}),\ D \subseteq \mathbb{R}^2$

Satz: y ist eine Lösung der Gleichung $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 :\Leftrightarrow\ \exists\, c \in \mathbb{R} : F(x, y(x)) = c\ \forall\, x \in I$

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $y : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $(x, y(x)) \in D\ \forall\, x \in I$, die Gleichung ist auf D exakt und F sei eine Stammfunktion von (P, Q) auf D

Lösungsverfahren für exakte Differentialgleichungen:

1. Untersuche DGL auf Exaktheit: falls $P_y = Q_x$, das Gebiet sternförmig und $P, Q \in C^1$ ist, existiert die Stammfunktion und die DGL ist exakt
2. Bestimmte Stammfunktion $F(P,Q)$ mit $F_x = P,\ F_y = Q$
3. Es gilt: $y(x)$ ist Lösung der DGL $:\Leftrightarrow\ \exists\, c \in \mathbb{R} : F(x, y(x)) = c\ \forall\, x \in I$. Auflösen nach $y(x)$ liefert die Lösung.

Multiplikator einer ex. DGL: $\mu \in C(D, \mathbb{R})$ und $\mu(x,y) \neq 0\ \forall\ (x,y) \in D$ mit $(\mu P)dx + (\mu Q)dy = 0$ ist auf D exakt

- kann nicht exakte DGLs exakt machen
- Falls D sternförmig, $P, Q \in C^1(D, \mathbb{R})$: μ Multiplikator $:\Leftrightarrow (\mu P)_y = (\mu Q)_x$ auf D
- Hängt $f := \frac{1}{Q}(P_y - Q_x)$ nur von x ab, so ist $\mu(x) := e^{\int f(x)\ dx}$ ein Multiplikator

  Hängt $f := \frac{1}{P}(P_y - Q_x)$ nur von y ab, so ist $\mu(y) := e^{\int f(y)\ dy}$ ein Multiplikator
- Lösung: Suche Stammfunktion der neuen Gleichung und rechne wie oben, die Lösungen beider Gleichungen stimmen überein

Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

Norm $||\cdot||$ eines Vektorraums $\mathcal{X}$: Abbildung $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit

(i) $||x|| \geq 0\ \forall\ x \in \mathcal{X},\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||\ \forall\ \alpha \in \mathbb{K}\ \forall\ x \in \mathcal{X}$

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ Δ-Ungleichung

Konvergenz einer Folge (x_n): $\exists\ x \in \mathcal{X} :\ ||x_n - x|| \to 0\ (n \to \infty)$

Eigenschaften einer Menge $A \subseteq \mathcal{X}$:

- A heißt **konvex** $:\Leftrightarrow$ aus $x, y \in A$ und $t \in [0,1]$ folgt stets $x + t(y - x) \in A$
- A heißt **beschränkt** $:\Leftrightarrow\ \exists\ c \geq 0 :\ ||x|| \leq c\ \forall\ x \in A$
- A heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A gehört zu A
- A heißt **kompakt** $:\Leftrightarrow$ jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu A gehört
- (x_n) heißt **Cauchyfolge** $:\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :\ ||x_n - x_m|| < \varepsilon\ \forall\ n, m \geq n_0$

Kontrahierend: $T : A \to \mathcal{D}$ mit $\exists\ L \in [0,1] : ||Tx - Ty|| \leq L \cdot ||x - y||\ \forall\ x, y \in A$

Banach-Raum / vollständiger Raum: $\mathcal{X}$: $\mathcal{X}$ normierter Raum mit: jede Cauchyfolge in $\mathcal{X}$ ist konvergent

Operator auf $A \subseteq \mathcal{X}$: Abbildung $T : A \to \mathcal{X}$

- Schreibweise: Tx statt $T(x)$
- **Fixpunkt**: $x^* \in A$ mit $Tx^* = x^*$
- **Stetigkeit von** T **in** x_0: für jede Folge (x_n) in A mit $x_n \to x_0 :\ Tx_n \to Tx_0$
  - $\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :\ ||Tx - Tx_0|| < \varepsilon\ \forall\ x \in U_\delta(x_0) \cap A$
- **Stetigkeit von** T **auf** A: T ist stetig in jedem $x \in A$
- T heißt **kontrahierend** $:\Leftrightarrow\ \exists\ L \in [0,1] : ||Tx - Ty|| \leq L \cdot ||x - y||\ \forall\ x, y \in A$

Fixpunktsatz von Banach: $\mathcal{X}$ sei ein Banach-Raum, $A \subseteq \mathcal{X}$ sei abgeschlossen, $T : A \to \mathcal{D}$ sei kontrahierend und es sei $T(A) \subseteq A$. Dann hat T genau einen Fixpunkt $x^* \in A$. Sei $x_0 \in A$ beliebig und $x_{n+1} := Tx_n$ $(n \geq 0)$. Dann:

(i) $x_n \in A \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \to x^*$

(iii) $||x_n - x^*|| \leq \frac{L^n}{1-L} ||x_1 - x_0|| \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ (x_n heißt Folge der sukzessiven Approximation)

Fixpunktsatz von Schauder: $\mathcal{X}$ sei ein normierter Raum, $A \subseteq \mathcal{X}$ sei konvex und kompakt und $T : A \to \mathcal{X}$ sei stetig und $T(A) \subseteq A$. Dann hat T einen Fixpunkt.

<u>Der Existenzsatz von Peano</u>

Integralgleichung: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad (x \in I)$

- AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- $D \subseteq \mathbb{R}^2,\; f : D \to \mathbb{R},\; (x_0, y_0) \in D,\; I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Satz:

(i) y ist die Lösung einer Integralgleichung auf $I \Leftrightarrow y$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

(ii) Ist $T : C(I) \to C(I)$ definiert durch $(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$, so gilt: y ist eine Lösung des obigen Anfangswertproblems $\Leftrightarrow Tu = u$

Existenzsatz von Peano I: Das AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit $f \in C(S, \mathbb{R})$ beschränkt hat eine Lösung auf $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$

- $S := I \times \mathbb{R},\; x_0 \in I,\; y_0 \in \mathbb{R}$

Existenzsatz von Peano II: Das AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit $f \in C(R, \mathbb{R})$ hat eine Lösung auf $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$

- $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R},\; x_0 \in I,\; y_0 \in \mathbb{R},\; s > 0$
- $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s],\; M := \max \{|f(x,y)| : (x,y) \in R\}$

Existenzsatz von Peano III: Es ex. $\delta > 0$: das AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit $f \in C(D, \mathbb{R})$ hat eine Lösung $y : K \to \mathbb{R}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in D,\; K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

<u>Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf</u>

Lipschitzbedingung bezüglich y auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$: $\;\exists\, \gamma \geq 0 : |f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leq \gamma \cdot |y - \overline{y}| \;\forall\, (x,y), (x,\overline{y}) \in D$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf I: Das AWP hat $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit der Funktion $f \in C(S, \mathbb{R})$ die auf S einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt hat auf $I = [a,b]$ genau eine Lösung, gegen die die Folge der sukzessiven Approximationen (z_n) konvergiert.

- $x_0 \in I,\; y_0 \in \mathbb{R},\; S := I \times \mathbb{R}$
- $z_0 \in C(I)$ beliebig und $z_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z_n(t))\, dt,\; (x \in I)$, also $z_{n+1} = Tz_n$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf II: Das AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit der Funktion $f \in C(R, \mathbb{R})$ die auf R einer Lipschitzbedingung bezüglich y genügt hat auf $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$ genau eine Lösung. Iterative Ermittlung der Lösung wie bei Picard-Lindelöf I.

- $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R},\ s > 0$
- $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$ und $f \in C(R, \mathbb{R})$
- $M := \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in R\}$

Lokale Lipschitzbedingung bzgl y: $\forall\ (x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen $\exists$ Umgebung U von (x_0, y_0) mit: $U \subseteq D$ und f genügt auf U einer LB bzgl. y

Satz: f partiell db nach y auf D und $f_y \in C(D, \mathbb{R}) \Rightarrow f$ genügt auf D einer lokalen LB bzgl. y

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf III: Das AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit einer Funktion $f \in C(D, \mathbb{R})$ die auf D einer lokalen LB bzgl. y genügt ist eindeutig lösbar

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in D$

Matrizenwertige Funktionen

Vektorraum aller $(m \times m)$-Matrizen: $\mathbb{M}_m,\ m \in \mathbb{N}$

- $\dim \mathbb{M}_m = m^2$
- $a^{(k)}$: k-te Spalte von $A \in \mathbb{M}_m,\ A = (a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(m)})$
- $\text{Re}\, A = \frac{1}{2}(A + \overline{A}),\ \text{Im}\, A = \frac{1}{2i}(A - \overline{A})$
- Eigenwert von A: $\lambda \in \mathbb{K}$ mit: $\exists\ x \in \mathbb{K}^m,\ x \neq 0 : Ax = \lambda x$ (x: Eigenvektor zum Eigenwert λ)
- Charakteristisches Polynom von A: $p(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ (E: Einheitsmatrix)
- Algebraische Vielfachheit des EWs $\lambda_0 \in \mathbb{K} : q$ mit λ_0 ist q-fache Nullstelle von p

Matrixwertige Funktion: $A(x) = (a_{jk}(x)) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{an}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{pmatrix}$

Exponentialfunktion: $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (A \in \mathbb{M}_m)$

- $e^0 = E,\ \overline{e^A} = e^{\overline{A}}$
- Falls $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- Für $A \in \mathbb{M}_m,\ \Phi(x) := e^{xA}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist Φ auf $\mathbb{R}$ db und $\Phi'(x) = A \cdot e^{xA} = e^{xA} \cdot A$

Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Systeme 1. Ordnung

System von DGLn 1. Ordnung: $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_m) \\ y_2' = f_2(x, y_1, ..., y_m) \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, ..., y_m) \end{cases}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1},\ (x_0, y_0) \in D,\ x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}^m,\ f = (f_1, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion
- Setze $y = (y_1, ..., y_m)$, das AWP sei $(A) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- Peano und Picard-Lindelöf gelten entsprechend wie im Eindimensionalen

Lineare Systeme

Lineares System: DGL-System $\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + ... + a_{1m}(x)y_m + b_1(x) \\ \vdots \qquad \vdots \\ y_m' = a_{m1}(x)y_1 + ... + a_{mm}(x)y_m + b_m(x) \end{cases}$

- $m \in \mathbb{N},\ I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}^m,\ D := I \times \mathbb{R}^m,\ a_{jk}, b_j : I \to \mathbb{R}$ stetig

Lineares System (Kurzschreibweise): (S) $y' = A(x)y + b(x)$

- $A(x) := (a_{jk}(x)),\ b(x) := (b_1(x), ..., b_m(x)),\ y := (y_1, ..., y_m)$
- AWP (A) $\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Satz: (A) hat genau eine Lösung, (S) *hat* eine Lösung auf I

Lösung von (S): $y : I \to \mathbb{R}^m :\Leftrightarrow\ \exists\ y_h : I \to \mathbb{R}^m$ mit y_h löst (H) $y' = A(x)y$ auf I und $y = y_h + y_s$

- y_s: spezielle Lösung von (S) auf I.

$\mathbb{L} := \{y : I \to \mathbb{R}^m : y \text{ löst (H) auf } I\}$

Lösungssystem von (H): $y^{(1)}, ..., y^{(m)} \in \mathbb{L}$

Lösungsmatrix von (H): $Y(x) := (y^{(1)}(x), ..., y^{(m)}(x)) \in \mathbb{M}_m$

Satz:

(i) $Y(x)' = A(x) \cdot Y(x)\ \forall\ x \in I$

(ii) $\{Yc : c \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{L}$

Wronskideterminante: $W(x) := \det Y(x) \quad (x \in I)$

- $W(x) = W(\xi) \cdot e^{\int_\xi^x Spur\ A(t)\ dt}\ \forall\ x \in I \quad (\xi \in I)$

Fundamentalsystem von (H): $y^{(1)}(x), ..., y^{(m)}(x) \in \mathbb{L}$ linear unabhängig

- Dann heißt Y Fundamentalmatrix
- $y^{(1)}, ..., y^{(m)}$ ist ein FS von (H) $:\Leftrightarrow Y(x)$ ist invertierbar $\forall\ x \in I \Leftrightarrow W(x) \neq 0\ \forall\ x \in I \Leftrightarrow W(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in I$
- Y FM von (H) und $Z : I \to \mathbb{M}_m$ Funktion. Z FM von (H) $\Leftrightarrow\ \exists\ C \in \mathbb{M}_m : C$ ist invertierbar, $C = \overline{C}$ und $Z(x) = Y(x)C\ \forall\ x \in I$

Spezielle Lösung von (IH) $y' = A(x)y + b(x)$: $y_s(x) := Y(x) \int (Y(x))^{-1} b(x)\ dx$

- bzw. $y_s(x) = \sum_{k=1}^m \left(\int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx \right) y^{(k)}(x)$
- $W_k(x) := \det \left(y^{(1)}(x), ..., y^{(k-1)}(x), b(x), y^{(k+1)}(x), ..., y^{(m)}(x) \right)$

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Lineares System mit konstanten Koeffizienten: (S) $y' = Ay + b(x)$ mit $A = (a_{jk}) \in \mathbb{M},\ a_{jk} \in \mathbb{C}$ konstant und $b : I \to \mathbb{C}^m$ stetig

- AWP (A) $\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- $I \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{C}^m$

Satz:

(i) (A) hat auf I genau eine Lösung

(ii) e^{xA} ist eine FM von (H) $y' = Ay$

Lösungsverfahren für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten (einfache Eigenwerte):

1. Bestimme die Eigenwerte $\lambda_2, ..., \lambda_m$ (char. Polynom $\det(A - \lambda E)$ Null setzen)
2. Berechne die zu den Eigenwerten λ_j gehörenden Eigenvektoren $c^{(j)} \in Kern(A - \lambda_j E)$, d.h. löse das Gleichungssystem $(A - \lambda_j E) \cdot x = 0$ $(j = 1...m)$
3. Es sei $y^{(j)}(x) := e^{\lambda_j x} c^{(j)}$. Dann ist $y^{(1)}, ..., y^{(m)}$ ein komplexes Fundamentalsystem von (H).
4. $\text{Re}\, y^{(1)}, ..., \text{Re}\, y^{(l)}, \text{Im}\, y^{(1)}, ..., \text{Im}\, y^{(l)}, y^{(2l+1)}, ..., y^{(m)}$ ist reelles Fundamentalsystem von (H) falls A reell, wobei $y^{(1)}, ..., y(l)$ die komplexen Eigenwerte und $y^{(2l+1)}, ..., y^{(m)}$ die reellen sind

Lösungsverfahren für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten:

1. Bestimme $\lambda_1, ..., \lambda_k$ paarw. verschiedene Eigenwerte von A und $q_1, ..., q_k$ deren Vielfachheiten (char. Polynom $\det(A - \lambda E)$ Null setzen)
2. Für jeden Eigenwert λ mit Vielfachheit q:
   - Berechne zugehörigen Eigenraum: $c^{(1)}, ..., c^{(\nu)}$ l.u. $\in Kern(A - \lambda E)^q$
   - $y^{(j)}(x) := e^{\lambda x}(c^{(j)} + x(A - \lambda E)c^{(j)} + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda E)^2 c^{(j)} + ... + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}(A - \lambda E)^{q-1} c^{(j)}),\ j = 1..\nu$ sind l.u. Lösungen von (H)
3. $\text{Re}\, y^{(1)}, ..., \text{Re}\, y^{(l)}, \text{Im}\, y^{(1)}, ..., \text{Im}\, y^{(l)}, y^{(2l+1)}, ..., y^{(m)}$ ist reelles Fundamentalsystem von (H) falls A reell, wobei $y^{(1)}, ..., y(l)$ die komplexen Eigenwerte und $y^{(2l+1)}, ..., y^{(m)}$ die reellen sind

Spezielle Lösung von (IH) $y' = Ay + b(x)$:

1. Ansatz: $y_s(x) = c_1(x) y^{(1)}(x) + ... + c_m(x) y^{(m)}(x) \quad (y^{(1)}, .., y^{(m)}$ FS von (H))
2. Einsetzen in (IH)

<u>Lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung</u>

Lineare DGL m-ter Ordnung: $y^{(m)} + a_{m-1}(x) y^{(m-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$

- $a_0, a_1, ..., a_{m-1}, b \in C(I, \mathbb{R}),\ I \subseteq \mathbb{R}$

Lineare DGL m-ter Ordnung (Kurzschreibweise): $Ly = b(x)$

- $Ly := y^{(m)} + a_{m-1}(x) y^{(m-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x)$
- Gleichung homogen $:\Leftrightarrow b \equiv 0$
- AWP: $\begin{cases} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0, ..., y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$

Lösungsverfahren für DGLn m-ter Ordnung:

1. Bestimme Lösung $\hat{y} : I \to \mathbb{R}$ von (H) $Ly = 0$
2. Bestimme spezielle Lösung y_s der Gleichung $Ly = b$: $y_s := \sum_{k=1}^{m} y_k \int \frac{W_k(x)}{W(x)}\ dx$
   - Wronski-Determinante: $W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$

- $y_1, ..., y_m \in \mathbb{L} = \{y : I \to \mathbb{R} :$ y löst (H) auf I$\}$ Fundamentalsystem, also l.u.
- $W_k(x)$: die Determinante, die aus $W(x)$ entsteht indem man in $W(x)$ die k-te Spalte durch $(0, ..., 0, b(x))^T$ ersetzt

Reduktionsverfahren nach d'Alembert $(m = 2)$:

1. y_1 sei Lösung von (*) $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,\ y_1(x) \neq 0\ \forall\ x \in I$
2. z sei Lösung von $z' = -\left(a_1(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}\right) \cdot z,\ z \neq 0$
3. $y_2(x) := y_1(x) \cdot \int z(x)\ dx$
4. y_1, y_2 ist ein FS von (*)

Lineare DGL m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $Ly := y^{(m)} + a_{m-1}y^{m-1} + ... + a_1y' + a_0y = b(x)$

- $a_0, a_1, ..., a_{m-1} \in \mathbb{C}$
- Satz: Das AWP $\left\{ \begin{array}{l} Ly = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{array} \right.$ hat auf I genau eine Lösung
- Charakteristisches Polynom von (H) $Ly = 0$: $p(\lambda) := \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_1\lambda + a_0$
  - z.B. $a''' + 2y'' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 1$ (y geht in 1 über!)

Lösungsverfahren für lineare DGLn m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

1. λ_0 sei eine q-fache Nullstelle von p. Dann sind $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, ..., x^{q-1}e^{\lambda_0 x}$ l.u. Lösungen von (H) $\Rightarrow$ (komplexes) Fundamentalsystem von (H) durch Anwendung auf alle Nullstellen von p
2. Falls λ komplex: nur eine Lösung bestimmen (nicht auch die der konjugiert komplexen) und anschließend in Real- und Imaginärteil aufspalten
3. Bestimme spezielle Lösung y_s von (IH) $Ly = b(x)$:
   - $y_s(x) = x^q e^{\alpha x} \left[(A_0 + A_1x + ... + A_nx^n) \cos(\beta \cdot x) + (B_0 + B_1x + ... + B_nx^n) \sin(\beta \cdot x)\right]$
   - $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ n, q \in \mathbb{N}_0,\ b$ von der Form $b(x) = (b_0 + b_1x + ... + b_nx^n)e^{\alpha x} \cos(\beta \cdot x)$ oder $b(x) = ... \sin(\beta \cdot x)$
   - $\alpha + i\beta$ q-fache Nullstelle von p ist Voraussetzung (aber „0-fache Nullstelle" $\mu \in \mathbb{C}$ auch erlaubt, d.h. wenn $p(\mu) \neq 0$)

Die Euler'sche Differentialgleichung

Eulersche DGL: $x^m y^{(m)} + a_{m-1}x^{m-1}y^{(m-1)} + ... + a_1xy' + a_0y = b(x)$

- $a_0, ..., a_{m-1} \in \mathbb{R}$

Lösungsverfahren für Euler'sche Differentialgleichungen:

1. Substituiere $x = e^t$ und setze $u(t) := y(e^t) = y(x)$
2. $\Rightarrow u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + ... + b_1u' + b_0u = b(e^t)$ lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, wie oben lösbar
3. Setze in die allg. Lösung dieser Gleichung $t = \log x$

Nicht fortsetzbare Lösungen

Anfangswertproblem (A) $\left\{ \begin{array}{ll} y' = f(x, y) & f : D \to \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 & \end{array} \right.$

Menge aller Lösungen von (A): $\mathcal{L}_{(A)}$

Fortsetzung von $u \in \mathcal{L}_{(A)}$: $v \in \mathcal{L}_{(A)}$ mit $I_u \subseteq I_v$ und $u = v$ auf I_u

- I_y: Definitionsintervall von $y \in \mathcal{L}_{(A)}$

Nicht Fortsetzbarkeit von $v \in \mathcal{L}_{(A)}$ $:\Leftrightarrow$ aus $y \in \mathcal{L}_{(A)}$ und v Fortsetzung von y folgt $I_v = I_y$

Satz: Sei $u \in \mathcal{L}_{(A)}$. Dann existiert ein $v \in \mathcal{L}_{(A)}$: v ist eine nicht fortsetzbare Fortsetzung von u („Maximale Fortsetzung“)

Satz: Sei D offen, $f \in C(D, \mathbb{R})$, f sei auf D partiell db nach y und $f_y \in C(D, \mathbb{R})$. Dann hat (A) eine eindeutig bestimmte nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$

Minimal- und Maximallösung

Maximallösung von (A): $y^* \in \mathcal{L}_{(A)}$ mit $y \leq y^*$ auf $I_y \cap I_{y^*}$ $\forall\, y \in \mathcal{L}_{(A)}$

Minimallösung von (A): $y_* \in \mathcal{L}_{(A)}$ mit $y \geq y_*$ auf $I_y \cap I_{y_*}$ $\forall\, y \in \mathcal{L}_{(A)}$

Lösungstrichter von (A): $T := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y_*(x) \leq y \leq y^*(x)\big\}$

Existenzsätze:

(i) Das AWP (A) hat eine Maximallösung $y^* : I \to \mathbb{R}$ und eine Minimallösung $y_* : I \to \mathbb{R}$

(ii) Sei $(\sigma, \tau) \in T$. Dann existiert eine Lösung $v : I \to \mathbb{R}$ von (A) auf I mit $v(\sigma) = \tau$.

Ober- und Unterfunktion

Unterfunktion bezüglich (A): $v : I \to \mathbb{R}$ db mit $v'(x) < f(x, v(x))$ $\forall\, x \in I$ und $v(x_0) \leq y_0$

Oberfunktion bezüglich (A): $w : I \to \mathbb{R}$ db mit $w'(x) > f(x, w(x))$ $\forall\, x \in I$ und $v(x_0) \geq y_0$

Satz: v sei eine Unterfunktion bzgl. (A), w sei eine Oberfunktion bzgl. (A) und y sei eine Lösung des AWPs (A) auf I. Dann: $v < y < w$ auf I_0.

Stetige Abhängigkeit

Stetige Abhängigkeit: Sei (f_n) eine Folge in $C(D, \mathbb{R})$, (x_n) eine Folge in I, (η_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $M \geq 0$. Es gelte:

(a) $|f_n(x, y)| \leq M,\ |\eta_n| \leq M\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, (x, y) \in D$

(b) (f_n) konvergiere auf $R := I \times [-(b - a + 1)M, (b - a + 1)M]$ gleichmäßig gegen f

(c) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWPs $\begin{cases} y' = f_n(x, y) \\ y(x_n) = \eta_n \end{cases}$. Dann:

(1) (y_n) enthält eine auf (I) glm. konvergente TF (y_{n_k}) und für $y(x) := \lim_{k\to\infty} y_{n_k}(x)$ gilt: $y'(x) = f(x, y(x))$

(2) Gilt $x_n \to x$ $(x \in I)$ und $\eta_k \to y_0$ und hat (A) auf I genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, so konvergiert (y_n) auf I glm. gegen y

Zwei Eindeutigkeitssätze

Satz von Nagumo:
Es gelte $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \frac{|y - \tilde{y}|}{|x - x_0|}$ $\forall\, (x, y), (x, \tilde{y}) \in D$ mit $x \neq x_0$. Dann hat (A) höchstens eine Lösung auf I.

Satz von Osgood:
Es sei $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und > 0 auf $(0, \infty), t_0 > 1$ und das eigentliche Integral $\int_0^{t_0} \frac{dn}{\varphi(n)}$ sei divergent. Weiter gelte: $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \varphi(|y - \tilde{y}|)$ $\forall\, (x, y), (x, \tilde{y}) \in D$ mit $y \neq \tilde{y}$. Dann hat (A) auf I höchstens eine Lösung.

Randwertprobleme

Randwertproblem: $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_a, \ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_b \end{cases}$ mit $f : I \times D \to \mathbb{R}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^2, \ I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$

Green'sche Funktion: $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $G(x,t) := \begin{cases} t(x-1) \text{ falls } 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(t-1) \text{ falls } 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}$

Dirichlet-Randwertproblem: (R) $\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

- $(Ty)(x) := \int_0^1 G(x,t) \ f(t, y(t)) \ dt$
- Satz: y löst (R) auf $[0,1] :\Leftrightarrow Ty = y$

Satz von Lettenmeyer: $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $L \geq 0, \ |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \ \forall \ (x,y), (x,\tilde{y}) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. Ist $L < \pi^2$, so hat (R) auf $[0,1]$ genau eine Lösung.

Satz von Scorza-Dragoni: $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \ D := I \times \mathbb{R}, \ f \in C(D, \mathbb{R})$ sei auf D beschränkt. Dann hat das RWP $\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$ eine Lösung auf I.

- Satz: $A > 0, \ 0 < B < \pi^2, \ f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es gelte $|f(x,y)| \leq A + B|y|$. Dann hat das Dirichlet-RWP (R) eine Lösung auf $[0,1]$