Funktionentheorie I - Formelsammlung

von Julian Merkert, Sommersemester 2006, Dr. Schmoeger

Körper der komplexen Zahlen: $\mathbb{R}^2$ mit...

1. Addition: $(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d)$
2. Multiplikation: $(a,b)\cdot(c,d):=(ac-bd,ad+bc)$

- Inverses Element der Addition: $(-a,-b)$
- Inverses Element der Multiplikation: $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$
- Darstellung von $z\in\mathbb{C}:\ z=a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$
  - Realteil von z: $\text{Re}\, z:=a$
  - Imaginärteil von z: $\text{Im}\, z:=b$

Konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z}:=a-ib$

Betrag von z: $|z|:=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$

Rechenregeln:

- $\text{Re}\, z=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ \text{Im}\, z=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$
- $|z|=0\Leftrightarrow z=0$
- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\ \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w},\ \overline{\frac{1}{w}}=\frac{1}{\overline{w}}$
- $|\overline{z}|=|z|,\ |z|^2=z\overline{z}=\overline{z}z$
- Δ-Ungleichung: $|z+w|\leq|z|+|w|$
- $||z|-|w||\leq|z-w|$

Polarkoordinaten von $z=x+iy$: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

- φ heißt ein Argument von z, $\varphi=\arg z$
- $\varphi\in[-\pi,\pi]$ mit $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ heißt Hauptwert des Arguments, $\varphi=\text{Arg}\, z$

Formel von de Moivre: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)$

n-te Wurzel aus $a=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$: $z^n=a\Leftrightarrow z\in\{z_0,...,z_{n-1}\}$

- $z_k:=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})\right),\ k=0,1,...,n-1$

Topologische Begriffe: (a_n) sei eine Folge in $\mathbb{C}$.

- Beschränktheit: $\exists\ c\geq0:|a_n|\leq c\ \forall\ n\in\mathbb{N}$
- Cauchyfolge: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}:|a_n-a_m|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0$
- Konvergenz: $\exists\ a\in\mathbb{C}:|a_n-a|\to0\ (n\to\infty)$
  - $\Leftrightarrow$ $(\text{Re}\, a_n,\text{Im}\, a_n)$ konvergiert. Dann: $\lim a_n=\lim\text{Re}\, a_n+i\lim\text{Im}\, a_n$

Unendliche Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ mit $(a_n)\in\mathbb{C}$

- Konvergenz, Cauchykriterium, Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Minorantenkriterium, Quotientenkriterium gelten

Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$

- $(\text{Re } f)(z) := \text{Re } f(z)$
- $(\text{Im } f)(z) := \text{Im } f(z)$
- $|f|(z) := |f(z)|$

Stetigkeit in z_0: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ \forall\ z \in U_\delta(z_0 \cap D)$

- $\Leftrightarrow$ Re f und Im f sind in z_0 stetig
- $\Leftrightarrow$ für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0 : f(z_n) \to f(z_0)$

Lokalkonstanz von $\varphi : M \to \mathbb{C}:\ \forall\ a \in M\ \exists\ \delta = \delta(a) > 0 : \varphi$ ist auf $U_\delta(a) \cap M$ konstant

Gebiet: $M \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend oder wegzusammenhängend

- M zusammenhängend :$\Leftrightarrow$ jede auf M lokalkonstante Funktion ist auf M konstant

Komplexe Differenzierbarkeit in z_0 / **Ableitung**: $\exists\ \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

- f ist in $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0)$ komplex db $\Leftrightarrow$ f ist in (x_0, y_0) reell db und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:
  1. $\frac{\partial \text{Re } f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \text{Im } f}{\partial y}(z_0)$
  2. $\frac{\partial \text{Re } f}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \text{Im } f}{\partial x}(z_0)$
- Dann: $f'(z_0) = \frac{\partial \text{Re } f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial \text{Im } f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \text{Im } f}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial \text{Re } f}{\partial y}(z_0)$

Holomorphie auf D: f ist in jedem Punkt $z \in D$ komplex db

- $H(D) := \{g : D \to \mathbb{C} :$ g ist auf D holomorph$\}$

Punktweise Konvergenz von (f_n): $\forall\ z \in A$ ist $(f_n(z))$ konvergent

Gleichmäßige Konvergenz von (f_n): $\exists\ f : A \to \mathbb{C}$ mit: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\ \forall\ n \geq n_0\ \forall\ z \in A$

- Lokal glm. Konvergenz: (f_n) konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von A glm.

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n =: f(z)$

- $\varrho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ und $r := \frac{1}{\varrho}$
  (1) Ist $r = 0$, so konv. die PR nur in $z = z_0$
  (2) Ist $r = \infty$, so konv. die PR in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut
  (3) Ist $0 < r < \infty$, so gilt:
    (i) Die PR konvergiert in jedem $z \in U_r(z_0)$ absolut
    (ii) Die PR divergiert in jedem $z \notin \overline{U_r(z_0)}$
    (iii) Für $z \in \partial U_r(z_0)$ ist keine allg. Aussage möglich
    (iv) Die PR konv. auf $U_r(z_0)$ lokal glm.
- $f \in H(U_r(z_0))$
- 1. Ableitung: $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}\ \forall\ z \in U_r(z_0)$
- k-te Ableitung: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-k}$

Exponentialfunktion: $e^z := \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\ (z \in \mathbb{C})$

- $\exp'(z) = \exp(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$
- Additionstheorem: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

- $e^z \cdot e^{-z} = 1,\ e^z \neq 0,\ e^{-z} = \frac{1}{e^z}\ \forall\ z \in \mathbb{C}$
- $z = x + i \cdot y\ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow e^z = e^x e^{iy},\ |e^{iy}| = 1,\ |e^z| = e^x$

Cosinus: $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

- $\Leftrightarrow \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Sinus: $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

- $\Leftrightarrow \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen:

- $\cos,\ \sin \in H(\mathbb{C}),\ \cos' z = -\sin z,\ \sin' z = \cos z\ \forall\ z \in \mathbb{C}$
- $e^{iz} = \cos z + i \sin z\ \forall\ z \in \mathbb{C}$ und $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi\ \forall\ \varphi \in \mathbb{R}$
- Polarkoordinatendarstellung $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $z = |z| \cdot e^{i \arg z}$
- Additionstheoreme: $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,\ \sin(z + w) = \sin z \cos w - \sin w \cos z$
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1\ \forall\ z \in \mathbb{C}$
- Weitere:
  - $e^{2k\pi i} = 1\ \forall\ k \in \mathbb{Z},\ e^{2\pi i} = 1$
  - $e^{i\pi} + 1 = 0$
  - Für $z \in \mathbb{C}$: $e^z = 1 \Leftrightarrow\ \exists\ k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$
  - $e^{z+2\pi i} = e^z$ (Exponentialfunktion hat Periode $2\pi i$)

Ein Logarithmus von w: jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w,\ z = \log w$

- $e^z = w \Leftrightarrow\ \exists\ k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log |w|}_{\text{reeller Log.}} + i \cdot \operatorname{Arg} w + 2k\pi i$

Hauptzweig des Logarithmus: $\operatorname{Log} w := \log |w| + i \cdot \operatorname{Arg} w$

- $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$
- $\operatorname{Log} \in C(\mathbb{C}_-),\ \operatorname{Log} \in H(\mathbb{C}_-)$
- $\operatorname{Log}' w = \frac{1}{w}\ \forall\ w \in \mathbb{C}_-$
- $\operatorname{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}\ \forall\ z \in D$

Hauptzweig der allgemeinen Potenz: $w^a := e^{a \cdot \operatorname{Log} w}$

- $f(w) := w^a \Rightarrow f'(w) = a \cdot w^{a-1}\ \forall\ w \in \mathbb{C}_-$

Integral von φ stetig: $\int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{dt} := \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t)\ \mathrm{dt} + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t)\ \mathrm{dt}$

Weg: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig

- Träger: $\operatorname{Tr}(\gamma) := \gamma([a, b])$
- γ geschlossen $:\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$
- γ glatt $:\Leftrightarrow \gamma$ ist auf $[a, b]$ stetig db

Weglänge: $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\ \mathrm{dt}$

Parametertransformation: $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig db und bijektiv und $h(\alpha) = a,\ h(\beta) = b$

Komplexes Wegintegral: $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{dt}$ falls γ glatt

- $|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz}| \leq M\cdot L(\gamma)$ mit $M := \max_{z\in \mathrm{Tr}\,(\gamma)} |f(z)|$
- konv. (f_n) auf Tr (γ) glm. gegen f $\Rightarrow \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{dz} \to \int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz}$
- Also: $\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{dz} = \int_\gamma (\lim_{n\to\infty} f_n(z))\,\mathrm{dz}$

Stammfunktionen:

- f besitzt auf D eine SF $\Leftrightarrow\ \exists\ F\in H(D): F' = f$ auf D
- D offen, γ stückw. glatt und f besitzt auf D die SF F $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$
- Ist γ geschlossen und stückw. glatt, D offen und f besitzt auf D die SF F $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = 0$

Dreieck: $\Delta := \Delta_{z_1,z_2,z_3} := \{t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3 : t_1,t_2,t_3 \geq 0,\ t_1+t_2+t_3 = 1\}$

Lemma von Goursat:
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f\in H(D)$. Ist $\Delta\subseteq D$ ein Dreieck, so gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{dz} = 0$

Sterngebiet:

- G heißt sternförmig $:\Leftrightarrow\ \exists\ z^*\in G$ mit $S[z,z^*]\subseteq G\ \forall\ z\in G$
- G offen und sternförmig $\Rightarrow$ G Sterngebiet

Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete:
$G\subseteq\mathbb{C}$ Sterngebiet, $f\in H(G)$ und $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ stückw. glatt mit Tr $(\gamma)\subseteq G$. Dann:

(1) f besitzt auf G eine SF F

(2) $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

(3) Ist γ geschlossen, so ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = 0$

Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben:
$D\subseteq\mathbb{C}$ offen, $z_0\in D,\ r>0$ und $\overline{U_r(z_0)}\subseteq D$. $f\in H(D)$ und $\gamma(t) := z_0 + r\cdot e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$. Dann:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{dw}\ \forall\ z\in U_r(z_0)$$

- Die Werte von f in $U_r(z_0)$ sind also festgelegt durch die Werte von f auf $\partial U_r(z_0)$
- Mittelwertgleichung: Für $z = z_0 : f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\cdot e^{it})\,\mathrm{dt}$

Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen:
Sei $\emptyset\neq D\subseteq\mathbb{C}$, D offen und $f\in H(D)$. Dann:

(1) $f'\in H(D)$

(2) f ist auf D beliebig oft komplex db

(3) Integralformeln: Ist $z_0\in D,\ r>0,\ \overline{U_r(z_0)}\subseteq D$ und $\gamma(t) := z_0 + r\cdot e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$, so gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{dw}\ \forall\ z\in U_r(z_0)\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$$

Satz von Morera:
Sei $\emptyset\neq D\subseteq\mathbb{C}$, D offen und $f\in C(D)$. Dann:
$f\in H(D)\Leftrightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{dz} = 0$ für jedes Dreiecks $\Delta\subseteq D$.

Cauchy'sche Abschätzungen:
Sei $z_0\in\mathbb{C},\ r>0,\ f\in H(U_r(z_0))$ und f sei auf $U_r(z_0)$ beschränkt mit $M := \sup_{z\in U_r(z_0)} |f(z)|$. Dann:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M\cdot n!}{r^n}\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$$

Satz von Lionville:
Ist $f \in H(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so ist f konstant.

Fundamentalsatz der Algebra:
Sei $n \in \mathbb{N},\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0$ und $p(z) := a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$. Dann ex. ein $z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$

Potenzreihenentwicklung:
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D),\ z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\ \forall\ z \in U_r(z_0)$

- $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ dw
- $\gamma(t) = z_0 + \varrho \cdot e^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ 0 < \varrho < r$

Konvergenzsatz von Weierstraß
$D \subseteq \mathbb{C}$ offen, (f_n) sei eine Folge in $H(D)$ und (f_n) konvergiere auf D lokal glm. gegen $f : D \to \mathbb{C}$. Dann:

(1) $f \in H(D)$

(2) (f_n') konv. auf D lokal glm. gegen f'

Identitätssatz für PRn:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit KR $r > 0,\ f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für $z \in U_r(z_0)$.
(z_k) Folge in $\dot{U}_r(z_0)$ mit $z_k \to z_0$ und $f(z_k) = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Dann: $a_n = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

Identitätssatz für holomorphe Funktionen:
G Gebiet, $f \in H(G),\ (z_n)$ Folge in $G \backslash \{z_0\}$ mit $f(z_k) = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ und $z_k \to z_0$. Dann: $f = 0$ auf G.

- $Z(f) := \{z \in G : f(z) = 0\}$
- $f \in H(G),\ f \neq 0$ auf G und $z_0 \in Z(f) \Rightarrow\ \exists\ \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(z_0) \subseteq G,\ f(z) \neq 0\ \forall\ z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$
- $f \in H(G),\ z_0 \in G$ und $f^{(n)}(z_0) = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f = 0$ auf G.

Satz von der Gebietstreue: Ist $f \in H(G)$ nicht konstant, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Maximum-, Minimumprinzip (I): $f \in H(G)$ sei nicht konstant.

(1) $|f|$ hat auf G kein lokales Maximum

(2) Ist $Z(f) = \emptyset$, so hat $|f|$ auf G kein lokales Minimum.

Maximum-, Minimumprinzip (II): G beschränkt, $f \in C(\overline{G}),\ f \in H(G)$

(1) $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)|\ \forall\ z \in \overline{G}$

(2) Ist $f(z) \neq 0\ \forall\ z \in G$, so gilt: $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)|\ \forall\ z \in \overline{G}$

Ordnung / Vielfachheit m der Nullstelle $z_0 \in Z(f)$ von $f \in H(G),\ f \neq 0$:
$\exists\ g \in H(G),\ m \in \mathbb{N} : f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)\ \forall\ z \in G$ und $g(z_0) \neq 0$

Umkehrfunktion: $f \in H(G),\ z_0 \in G,\ f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow\ \exists\ r > 0 : U_r(z_0) \subseteq G$,

(i) f ist auf $U_r(z_0)$ injektiv und $f'(z) \neq 0\ \forall\ z \in U_r(z_0)$

(ii) $f(U_r(z_0))$ ist ein Gebiet

(iii) $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}\ \forall\ w \in f(U_r(z_0))$

Orientierter Winkel von γ_1 nach γ_2 in z_0: $\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := \arg \gamma_2'(0) - \arg \gamma_1'(0) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ $(modulo\ 2\pi)$

- $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \to \mathbb{C}$ glatte Wege, $\gamma_j'(t) \neq 0\ \forall\ t \in [0, a],\ \gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$

Winkeltreue: $f \in H(G),\ z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$. $\sphericalangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$

Konforme Abbildung von G_1 auf G_2: $f \in H(G_1)$ injektiv auf G_1 mit $f(G_1) = G_2$

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Automorphismus: $f : G \to G$ konform. Bez: $f \in \text{Aut}\,(G)$

- $\text{Aut}\,(\mathbb{D}) = \{\lambda \cdot S_a : \lambda \in \partial\mathbb{D}, a \in \mathbb{D}\}$
- $S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ a \in \mathbb{D}$

Schwarzsches Lemma: $f \in H(\mathbb{D}),\ f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D},\ f(0) = 0 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|\ \forall\ z \in \mathbb{D}$ und $|f'(0)| \leq 1$

- Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, so ex. ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ mit: $f(z) = \lambda \cdot z$

Isolierte Singularität von f: $z_0 \in D : \dot{D} = D\setminus\{z_0\},\ f \in H(\dot{D})$

Hebbare Singularität von f: $\exists\ h \in H(D) : h = f$ auf $\dot{D}$

Riemann'scher Hebbarkeitssatz: f hat in z_0 eine hebbare Singularität
$:\Leftrightarrow\ \exists\ \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f ist auf $U_\delta(z_0)$ beschränkt

Pol z_0 von f: $\exists\ m \in \mathbb{N},\ \ \exists\ g \in H(D) : f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}\ \forall\ z \in \dot{D}$ und $g(z_0) \neq 0$

- m ist eindeutig bestimmt und heißt Ordnung des Pols z_0 von f
- $|f(z)| \to \infty\ (z \to z_0)$

Wesentliche Singularität z_0 von f: z_0 ist nicht hebbar und kein Pol von f

Satz von Casorati-Weierstraß:
f habe in z_0 eine wesentliche Singularität, $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(z_0) \subseteq D$. Dann: $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$

Klassifikation: Die isol. Singularität in z_0 von f ist...

(1) hebbar $:\Leftrightarrow\ \exists\ \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f ist auf $U_\delta(z_0)$ beschränkt

(2) ein Pol von f $\Leftrightarrow |f(z)| \to \infty\ (z \to z_0)$

(3) wesentlich $\Leftrightarrow\ \forall\ \delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$ gilt: $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$

Laurent-Zerlegung: $0 \leq r < R \leq \infty,\ A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\},\ f \in H(A)$

- Dann ex. eindeutig bestimmte Funktionen $g \in H(U_R(0))$ und $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ mit $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})\ \forall\ z \in A$ und $h(0) = 0$
- g heißt Nebenteil von f
- $z \to h(\frac{1}{z})$ heißt Hauptteil von f

Laurent-Entwicklung: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\ \ (z \in A)$

- existiert, falls $0 \leq r < R \leq \infty,\ A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ und $f \in H(A)$
- Ist $r < \varrho < R$ und $\gamma(t) := z_0 + \varrho \cdot e^{it}\ (t \in [0, 2\pi]) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\text{dw}\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$
- Nebenteil von f: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$
- Hauptteil von f: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + ...$
- $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D,\ \dot{D} := D\setminus\{z_0\},\ f \in H(\dot{D}) \Rightarrow$
  - f hat in z_0 hebbare Singularität $\Leftrightarrow a_n = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$
  - f hat in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{-m} \neq 0,\ a_{-n} = 0\ \forall\ n > m$
  - f hat in z_0 eine wesentliche Singularität $\Leftrightarrow a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Residuum: $\text{Res}\,(f, z_0) = a_{-1}$

- $\text{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\text{dz}$, falls $\gamma(t) = z_0 + \varrho \cdot e^{it}\ (t \in [0, 2\pi],\ 0 < \varrho < R)$
- $\text{Res}\,(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$, falls $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}\ \forall\ z \in D\setminus\{z_0\},\ f, g \in H(D\setminus\{z_0\})$

- $\text{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0) \cdot f(z)$, falls f wie oben mit $m = 1$

Vollebene: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Riemann'sche Zahlenkugel: $S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\right\}$

Stereographische Projektion: $\sigma(N) := \infty,\ \sigma(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}$

- $\sigma^{-1}(\infty) := N,\ \sigma^{-1}(z) := \frac{1}{1+|z|^2} \cdot \left(\text{Re}\, z, \text{Im}\, z, |z|^2\right)$ falls $z \in \mathbb{C}$

Chordaler Abstand: $d(z, w) := ||\sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(w)||$

- $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow d(z, \infty) = (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}$
- $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow d(z, w) = (z - w) \cdot (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + |w|^2)^{-\frac{1}{2}}$

Konvergenz von (z_n) gegen z_0: $d(z_n, z_0) \to 0\ (n \to \infty)$

- $d(z_n, z_0) \to 0 \Leftrightarrow |z_n - z_0| \to 0$
- $d(z_n, \infty) \to 0 \Leftrightarrow |z_n| \to \infty$

Meromorphie von $f : D \to \hat{\mathbb{C}} :\Leftrightarrow$

(i) $P(f) := \{z \in D : f(z) = \infty\}$ ist in D diskret

(ii) $f|_{D\backslash P(f)} \in H(D\backslash P(f))$

(iii) jedes $z_0 \in P(f)$ ist ein Pol von f

- $M(D) := \left\{f : D \to \hat{\mathbb{C}} : \text{ f ist auf D meromorph}\right\}$

Moebiustransformation: $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ T(z) := \frac{az+b}{cz+d}\ (z \in \hat{\mathbb{C}},\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0)$

- Koeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =: \mathcal{A}_T$
- Menge aller Moebiustransformationen: $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ ist eine Gruppe.
- $T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$
- spezielle Moebiustransformationen:
  - Drehstreckung: $T(z) := az,\ a \neq 0$
  - Translation: $T(z) := z + a$
  - Inversion: $T(z) := \frac{1}{z}$
  - $T \in \mathcal{M}$ lässt sich darstellen als Hintereinanderausführung von Drehstreckungen, Translationen und Inversionen
- Sei $T \in \mathcal{M}$. Dann hat T einen oder zwei Fixpunkte oder es ist $T(z) = z$.

Doppelverhältnis von $z \in \mathbb{C}$ und $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$:

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & \text{falls } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3} & \text{falls } z_1 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3} & \text{falls } z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} & \text{falls } z_3 = \infty \end{cases}$$

Kreis- und Geradengleichung: $\varepsilon|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$

- Kreis für $\varepsilon = 1$ und $\beta < |\alpha|^2$
- Gerade für $\varepsilon = 0$

- $T \in \mathcal{M}$ bildet eine Gerade oder einen Kreis auf eine Gerade oder einen Kreis ab.

Komponente C von $D \subseteq \mathbb{C}$ offen: $C \subseteq D$, C ist zusammenhängend und aus $C \subseteq C_1 \subseteq D$, C_1 zsh. folgt stets $C = C_1$

Umlaufzahl von γ bzgl. z: $n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$

- $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$
- $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z} \; \forall \; z \in D := \mathbb{C} \backslash \mathrm{Tr}\,(\gamma)$
- Ist C eine Komponente von D, so ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf C konstant
- Ist C die unbeschränkte Komponente von D, so gilt: $n(\gamma, z) = 0 \; \forall \; z \in C$

Residuensatz: $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, \mathrm{dz} = \sum_{j=1}^k n(\gamma, z_j) \cdot \mathrm{Res}\,(f, z_j)$

- G Elementargebiet, $z_1, ..., z_k \in G$ und $f \in H(G \backslash \{z_1, ..., z_k\})$
- γ geschlossener, stückw. glatter Weg mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G \backslash \{z_1, .., z_k\}$

Elementargebiet: $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet mit: $\forall \; f \in H(G)$ existiert $F \in H(G) : F' = f$ auf G

Cauchy'scher Integralsatz für Elementargebiete: $\int_\gamma f(z) \, \mathrm{dz} = 0$

- $G \subseteq \mathbb{C}$ Elementargebiet, $f \in H(G)$ und γ geschlossener, stückw. glatter Weg mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G$

Cauchy'sche Integralformel: $n(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \; \forall \; z \in G \backslash \mathrm{Tr}\,(\gamma)$

Argumentenprinzip: $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{dz} = \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j)$ für $f \in M(G)$, G EG

- $b_1, ..., b_m$: alle Pole von f in G (jeder Pol sei so oft aufgeführt, wie seine Ordnung angibt)
- $a_1, ..., a_n$: alle Nullstellen von f in G
- γ: stückw. glatter und geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G \backslash \{b_1, ..., b_m, a_1, ..., a_n\}$

Anzahl der Nullstellen von f in $U_r(z_0)$: N_f (gezählt mit Vielfachheiten!)

- $N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{dz}$ falls $f(z) \neq 0 \; \forall \; z \in \mathrm{Tr}\,(\gamma)$, $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$ Gebiet

Satz von Rouché: Gilt $|g(z) - f(z)| < |f(z)| \; \forall \; z \in \mathrm{Tr}\,(\gamma)$, so ist $N_f = N_g$

Satz von Hurwitz: $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, (f_n) Folge in $H(G)$ und (f_n) konv. auf G lokal glm. gegen $f : G \to \mathbb{C}$. Dann:

(1) Ist $Z(f_n) = \emptyset \; \forall \; n \in \mathbb{N} \Rightarrow Z(f) = \emptyset$ oder $f \equiv 0$

(2) Sind alle (f_n) auf G injektiv $\Rightarrow$ f ist auf G injektiv oder f ist auf G konstant

Satz von Montel: $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine Folge in $H(D)$ und es gelte mit einem $c \geq 0 : |f_n(z)| \leq c \; \forall \; z \in D \; \forall \; n \in \mathbb{N}$. Dann enhält (f_n) eine auf D lokal glm. konvergente Teilfolge.

Konform-Äquivalenz zweier Gebiete $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C} : G_1 \sim G_2 :\Leftrightarrow \; \exists \; f \in H(G_1) : f(G_1) = G_2$, f ist auf G_1 injektiv

Riemann'scher Abbildungssatz: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann $G \sim \mathbb{D} :\Leftrightarrow G \neq \mathbb{C}$ und G ist ein EG

Charakterisierung von Elementargebieten I: Gebiet G hat die Eigenschaft (W)

- Eigenschaft (W): $\forall \; f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \; \exists \; g \in H(G) : g^2 = f$ auf G

Homotopie H von γ_0 nach γ_1 in $D \subseteq \mathbb{C}$ offen: $H : [0,1]^2 \to \mathbb{C} : H([0,1]^2) \subseteq D$

- H stetig, $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(t, 1) = \gamma_1(t) \; \forall \; t \in [0,1]$
- $H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \; \forall \; s \in [0,1]$
- $H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \; \forall \; s \in [0,1]$

- γ_0 und γ_1 homotop $\Leftrightarrow$ „γ_0 kann in D stetig nach γ_1 deformiert werden“

Punktweg: $\gamma_{z_0}(t) := z_0 \ (t \in [0,1],\ z_0 := \gamma(0) = \gamma(1),\ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ geschl. Weg)

Nullhomotopie von γ auf D: γ und γ_{z_0} sind in D homotop

- „γ lässt sich in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen“
- ist jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G$ in G nullhomotop, so heißt G **einfach zusammenhängend** („G hat keine Löcher“)
- Konvexe Gebiete sind einfach zusammenhängend

Cauchyscher Integralsatz I: $\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{dz}$

- $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma_0) = \mathrm{Tr}\,(\gamma_1) \subseteq D$, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$
- γ_0 und γ_1 homotop

Cauchyscher Integralsatz II: $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{dz} = 0$

- $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und γ geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq D$ sowie γ nullhomotop in D

Cauchycher Integralsatz III: $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{dz} = 0$

- $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zsh. Gebiet, $f \in H(G)$ und γ geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G$

Charakterisierung von Elementargebieten II+III: $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, dann ist äquivalent:

(1) G ist ein Elementargebiet

(2) G ist einfach zusammenhängend

(3) $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{dz} = 0\ \forall\ f \in H(G)$ und für jeden geschlossenen Weg γ mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G$

(4) $\forall\ f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset\ \exists\ g \in H(G) : e^g = f$ auf G

(5) $\forall\ f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset\ \exists\ g \in H(G) : g^2 = f$ auf G

(6) $G = \mathbb{C}$ oder $G \sim \mathbb{D}$

Inneres von γ geschl. Weg: $Int(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{Tr}\,(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\}$

Äußeres von γ geschl. Weg: $Ext(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{Tr}\,(\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}$

Nullhomologie von γ in G: $n(\gamma, z) = 0\ \forall\ z \in \mathbb{C}\backslash G$

- $\Leftrightarrow Int(\gamma) \subseteq G$
- Weg γ geschlossen nullhomolog in G $\Rightarrow \gamma$ nullhomolog in G
- G einfach zusammenhängend $\Rightarrow \gamma$ nullhomolog in G

Allgemeine Cauchy'sche Integralformel: $n(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw\ \forall\ f \in H(G)\ \forall\ z \in G\backslash \mathrm{Tr}\,(\gamma)$

- γ geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G,\ \gamma$ nullhomolog in G

CIS, Homologieversion I: γ geschl. Weg mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma) \subseteq G$. Dann:

- $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{dz} = 0\ \forall\ f \in H(G) \Leftrightarrow \gamma$ ist in G nullhomolog.

CIS, Homologieversion II: $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{dz}\ \forall\ f \in H(G)$

- γ_1, γ_2 geschlossene Wege mit $\mathrm{Tr}\,(\gamma_1), \mathrm{Tr}\,(\gamma_2) \subseteq G$
- γ_1, γ_2 in G homolog $(:\Leftrightarrow n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}\backslash G)$