Funktionentheorie I - Formelsammlung

von Julian Merkert, Skript Dr. Herzog

Komplexe Zahlen

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$: Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{R}$

Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ mit...

(i) Addition: $(x,y) + (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y})$

(ii) Skalare Multiplikation: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$

(iii) Neu: Multiplikation: $(x,y) \cdot (\tilde{x}, \tilde{y}) := (x\tilde{x} - y\tilde{y}, x\tilde{y} + \tilde{x}y)$

Imaginäre Einheit: $(0,1) =: i,\ i^2 = -1$

$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$

- $x =: \operatorname{Re} z$: Realteil von $z \in \mathbb{C}$
- $y =: \operatorname{Im} z$: Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$

Konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z} := x - iy$

Betrag von $z \in \mathbb{C}$: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$

(i) $|z| \geq 0,\ |z| = 0 :\Leftrightarrow z = 0$

(ii) $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z| \quad (\lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C})$

(iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Δ-Ungleichung

Rechenregeln:

(i) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2,\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

(iii) $z \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow z = \overline{z}$

Polarkoordinaten von $z = x + iy$: $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

- φ heißt ein Argument von z, $\varphi = \arg z$
- $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ heißt Hauptwert des Arguments, $\varphi = \operatorname{Arg} z$

Formel von de Moivre: Für $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gilt: $z^k = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))$

Topologische Begriffe

Konvergenz eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ gegen $z \in \mathbb{C}$: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 :\ \forall\, n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$

- $\Leftrightarrow$ $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ sind konvergent in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$
- $\Leftrightarrow$ (z_n) ist Cauchyfolge bzw. $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ sind Cauchyfolgen

Cauchyfolge: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall\, n, m \geq n_0$

Offene Kreissscheibe um z_0 mit Radius r: $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Offenheit von $M \subseteq \mathbb{C}$: zu jedem $z \in M\ \exists\ r > 0$ mit $K(z,r) \subseteq M$

- $\Leftrightarrow M = \dot{M} \Leftrightarrow \partial M \cap M = \emptyset$

Abgeschlossenheit von $M \subseteq \mathbb{C}$: $\mathbb{C} \backslash M$ ist offen

- $\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow \partial M \subseteq M \Leftrightarrow (z_n)$ Folge in M, $z_n \to z \Rightarrow z \in M$
- $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind offen und abgeschlossen

Inneres $\dot{M}$ von $M \subseteq \mathbb{C}$: Vereinigung aller offenen Teilmengen von M

Abschluss $\overline{M}$ von $M \subseteq \mathbb{C}$: Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von M

Rand von $M \subseteq \mathbb{C}$: $\partial M := \overline{M} \backslash \dot{M}$

Beschränktheit von $M \subseteq \mathbb{C}$: es existiert ein $r > 0$ mit $M \subseteq K(0, r)$

Kompaktheit von $M \subseteq \mathbb{C}$: jede Überdeckung von M durch offene Mengen $\mathcal{O}_j$ (d.h. $M \subseteq \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_j$) besitzt eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{O}_{j_1}, ..., \mathcal{O}_{j_m}$ (d.h. $M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{j_k}$)

- $\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt
- $\Leftrightarrow$ jede Folge in M hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M

$M \subseteq \mathbb{C}$ **zusammenhängend (zsh)**: es gibt keine zwei abgeschlossenen Mengen A_1, A_2 mit...

(i) $M = (M \cap A_1) \cup (M \cap A_2)$

(ii) $M \cap A_1 \neq \emptyset,\ M \cap A_2 \neq \emptyset$

(iii) $M \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$M \subseteq \mathbb{C}$ **wegzusammenhängend**: zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in M$ gibt es eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$

Metrik d: Abbildung $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit... $(x, y, z \in \mathcal{X},\ \mathcal{X}$ Menge)

(i) $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Metrischer Raum: $(\mathcal{X}, d)$

- Konvergenz einer Folge (x_n) in $\mathcal{X}$: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$
- Vollständigkeit eines Metrischen Raums $\mathcal{X}$: Jede Cauchyfolge in $\mathcal{X}$ konvergiert
- Stetigkeit von f in x_0 (Räume $(\mathcal{X}, d_1),\ (\mathcal{Y}, d_2)$): $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in M : d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $(a_n) \in \mathbb{C}$ Folge

Absolute Konvergenz: Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

(i) Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (absolut) konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ und es gilt:
   - $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$
   - $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent und $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

(iii) Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$ absolut konvergent mit Wert $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$

Cauchy-Kriterium: (a_n) ist konvergent $:\Leftrightarrow (a_n)$ ist eine CF

Quotientenkriterium: Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Es sei α_n beschränkt, $\beta := \liminf(\alpha_n)$ und $\alpha := \limsup |\alpha_n|$

(1) Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

(2) Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

(3) Ist $\alpha = \beta = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Wurzelkriterium: Sei (a_n) eine Folge und $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ($\alpha = \infty$ ist zugelassen).

(1) Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

(2) Ist $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

(3) Ist $\alpha = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich

Majorantenkriterium: Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium: Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Dirichlet'sches Kriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}, b_n \geq 0$ konvergiert, falls $M \geq 0$ existiert mit $|\sum_{k=0}^{n} a_n| \leq M$ und (b_n) eine fallende Nullfolge ist. In diesem Fall gilt $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k| \leq 2M b_{n+1}$

Die Riemann'sche Zahlenkugel

Vollebene: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Riemann'sche Zahlenkugel: $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\right\}$

- Abbildung der Gauß'schen Ebene ($= \mathbb{C}$) per stereographischer Projektion
- Abbildungsvorschrift: $g(z) := \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right)$
- Geometrische Eigenschaften der stereographischen Projektion:
  - Kreise auf S werden auf Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ abgebildet.
  - Die Bilder von z und $-\frac{1}{\bar{z}}$ sind Antipoden auf S

Chordaler Abstand von z und w: $\chi(z, w) = ||g(z) - g(w)||_{\mathbb{R}^3} = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$

Funktionen und Stetigkeit in $\mathbb{C}$

Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$

- $(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re} f(z)$
- $(\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im} f(z)$
- $|f|(z) := |f(z)|$

Stetigkeit in z_0: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ \forall\, z \in U_\delta(z_0 \cap D)$

- $\Leftrightarrow$ Re f und Im f sind in z_0 stetig
- $\Leftrightarrow$ für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0 : f(z_n) \to f(z_0)$

Komplex differenzierbare Funktionen

Komplexe Differenzierbarkeit von $f : D \to \mathbb{C}$ in z_0: $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$

- $f = u + iv$ mit $u, v : D \to \mathbb{R}$ ist komplex differenzierbar in $z_0 :\Leftrightarrow u, v$ sind in $z_0 = (x_0, y_0)$ reell differenzierbar und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gelten in $z_0 = (x_0, y_0)$

Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen: $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$

Ableitung: $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$

Holomorphie in $D \subseteq \mathbb{C}$: f ist in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar

$H(D) := \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ ist holomorph in } D\}$

Ableitungsregeln:

(i) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

(ii) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$

(iii) $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$

(iv) $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\ f'(z_0)$

<u>Potenzreihen</u>

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$

Konvergenzradius: $R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Satz von Cauchy-Hadamard: Für $|z-z_0| < R$ ist die Potenzreihe konvergent und für $|z-z_0| > R$ divergent. Weiter konvergiert sie gleichmäßig auf jedem Kreis $\overline{K(z_0,r)}$ mit $0 < r < R$.

Satz: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit $R > 0$. Dann ist $f \in H(K(z_0,r))$ mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$. Diese Potenzreihe hat ebenfalls den Konvergenzradius R.

Satz von Abel: Es sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \searrow 0 (n \to \infty)$. Dann konvergiert die Potenzreihe für alle z mit $|z| \leq 1, z \neq 1$.

<u>Stammfunktionen</u>

Stammfunktion von $f : D \to \mathbb{C}$: jede Funktion $F \in H(D)$ mit $F'(z) = f(z)\ (z \in D)$

Gebiet: offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$

Satz: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ mit $f'(z) = 0\ \forall\ z \in G$, so ist f konstant

Satz: Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit $R > 0$. Dann ist $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ eine Stammfunktion von f

<u>Die Funktionen $e^z,\ \log z,\ z^q$</u>

Exponentialfunktion: $e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(i) $\exp(z) \in H(\mathbb{C})$ und $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z}$

(iii) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(iv) $e^z \neq 0$

(v) exp besitzt die Periode $2\pi i$

Additionstheorem: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

- $z = x + iy \ \Rightarrow\ e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Cosinus: $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

- $\Leftrightarrow \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Sinus: $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

- $\Leftrightarrow \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Cosinus-Hyperbolicus: $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

Sinus-Hyperbolicus: $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$

Tangens: $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$

Logarithmus von $w \in \mathbb{C}$: jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$

- Schreibweise: $\log : \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$
- $\log' z = \frac{1}{z}$
- $e^z = w \Leftrightarrow \ \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log |w|}_{reeller\ Log.} + i \cdot \operatorname{Arg} w + 2k\pi i$

Potenz einer komplexen Zahl: $a^b := e^{b \log a}$

<u>Möbiustransformationen</u>

Möbiustransformation: $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ a, b, c, d \in \mathbb{C}$ definiert durch...

(i) falls $c \neq 0$: $T(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \in \mathbb{C} \backslash \left\{-\frac{d}{c}\right\} \\ \infty & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases}$

(ii) falls $c = 0$: $T(z) := \begin{cases} \frac{1}{d}(az+b) & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty \end{cases}$

$\mathcal{M} := \{T : T \text{ Möbiustransformation}\}$

- Satz: Die Möbiustransformationen bilden bezüglich Komposition eine (nicht abelsche) Gruppe

Spezialfälle von Möbiustransformationen:

- Drehstreckung: $T(z) = az \ (a \neq 0)$
- Translation: $T(z) = z + a$
- Inversion: $T(z) = \frac{1}{z}$
- Satz: jede Möbiustransformation lässt sich als Produkt der Spezialfälle darstellen.

Verallgemeinerter Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$: Kreis oder Gerade in $\hat{\mathbb{C}}$

- $=$ Kreis auf S
- Satz: Jedes $T \in \mathcal{M}$ bildet verallgemeinerte Kreis auf verallgemeinerte Kreise ab.

Doppelverhältnis von $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$: $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$

- Sind drei der Variablen $z_1, ..., z_4$ verschieden, so ist das Doppelverhältnis eine Möbiustranformation bezüglich der vierten.
- Möbiustransformation: $T(z) := \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)}$

Satz: Sind $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ verschieden, so existiert genau ein $T \in \mathcal{M}$ mit $T(z_2) = 1,\ T(z_3) = 0,\ T(z_4) = \infty$

Spiegelpunkt von z an Kreis oder Gerade K: $z^* = T^{-1}(\overline{T(z)})$

- Es gilt: $(z^*)^* = z$
- Spiegelpunkte sind invariant unter Möbiustransformationen

Das Wegintegral

Weg: stetige Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$

- $\gamma_-(t) := \gamma(1-t)$ falls $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ssd

Träger eines Wegs γ: $\gamma^* := \gamma[\alpha, \beta]$

Geschlossenheit eines Weges γ: $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$

Stückweise stetig differenzierbar (ssd): $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta,\ \gamma_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1$

Wegintegral von f über γ ssd: $\int_\gamma f(z)\ dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$

Länge eines Wegs γ: $L(\gamma) := \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\ dt$

Satz: $|\int_\gamma f(z)\ dz| \leq ||f||_\infty \cdot L(\gamma)$ mit $||f||_\infty = \max_{z \in \gamma^*} |f(z)|$

Satz: Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ssd, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig, $\Omega := \mathbb{C} \backslash \gamma^*$ und $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) := \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi$. Dann gilt: Ist $K(z_0, r) \subseteq \Omega$, so ist g auf $K(z_0, r)$ als Potenzreihe mit KR $\geq r$ darstellbar. Insbesondere also $g \in H(\Omega)$.

- Insbesondere gilt: $g^{(n)}(z_0) = n! \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\ d\xi$

Zusammenhangskomponente von $\Omega := \mathbb{C} \backslash \gamma^*$: $\Omega_z := \{\omega \in \Omega :$ Es existiert ein Weg in ω der z und w verbindet$\}$

Umlaufzahl: $\text{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$

(i) $\text{ind}_\gamma(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$

(ii) $\text{ind}_\gamma(z) = 0$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von Ω

(iii) ind_γ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω konstant

Der lokale Cauchy'sche Integralsatz

Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $F \in H(\Omega)$, F' stetig in Ω und $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ssd und geschlossen. Dann ist $\int_\gamma F'(z)\ dz = 0$.

Cauchy'scher Integralsatz für Dreiecke (Lemma von Goursat): Sei $\Delta = \Delta(a, b, c)$ ein Dreieck in der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C},\ p \in \Omega,\ f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $f \in H(\Omega \backslash \{p\})$. Dann gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0$.

- $\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = \int_{[a,b]} f(z)\ dz + \int_{[b,c]} f(z)\ dz + \int_{[c,a]} f(z)\ dz$ $(\Delta = \Delta(a, b, c))$

Cauchy'scher Integralsatz für konvexe Mengen: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex, $p \in \Omega,\ f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $f \in H(\Omega \backslash \{p\})$. Dann existiert ein $F \in H(\Omega)$ mit $F'(z) = f(z)$, insbesondere ist $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$ für jeden ssd geschlossenen Weg in Ω.

Cauchy'sche Integralformel für konvexe Mengen: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex, $f \in H(\Omega)$ und γ ein ssd geschlossener Weg in Ω. Dann gilt für $z \in \Omega \backslash \gamma^*$: $f(z) \cdot \text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ist $K(z_0, R) \subseteq \Omega$, so ist f auf $K(z_0, R)$ durch eine Potenzreihe mit KR $\geq R$ darstellbar.

Korollar: Ist $f \in H(\Omega)$, so ist $f' \in H(\Omega)$

Satz von Morera (Umkehrung des Cauchy'schen Integralsatzes): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subseteq \Omega$. Dann ist $f \in H(\Omega)$.

Eigenschaften holomorpher Funktionen

Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(\Omega)$ und $Z(f) := \{a \in \Omega : 0 = f(a)\}$. Dann ist entweder $Z(f) = \Omega$ oder $Z(f)$ hat keinen Häufungspunkt in Ω. Dann gilt: zu jedem $a \in Z(f)$ existiert genau ein $m = m(a) \in \mathbb{N}$ so dass ein $g \in H(\Omega)$ existiert mit $g(a) \neq 0$ und $f(z) = (z - a)^m g(z)$

- x_0 Häufungspunkt: $\exists$ Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$
- m heißt die **Ordnung** der Nullstelle a von f

Identitätssatz: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g \in H(\Omega)$ und hat $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in Ω so gilt $f = g$.

Isolierte Singularität von f im Punkt $a \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen $:\Leftrightarrow f \in H(\Omega \backslash \{a\})$

Hebbare Singularität von f: f kann zu einer holomorphen Funktion auf Ω fortgesetzt werden

Riemann'scher Hebbarkeitssatz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \backslash \{a\})$ und es existiert ein $r > 0$ mit: f ist beschränkt auf $K(a,r) \backslash \{a\}$. Dann ist a eine hebbare Singularität.

Klassifikation isolierter Singularitäten: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \backslash \{a\})$. Dann liegt genau einer der drei folgenden Fälle vor:

(i) f hat in a eine hebbare Singularität

(ii) a **Pol der Ordnung** m: Es gibt $c_1, ..., c_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $c_m \neq 0$, so dass $f(z) - \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{1}{(z-a)^k}$ $(z \in \Omega \backslash \{a\})$ in a eine hebbare Singularität hat. Dann: $|f(z)| \to \infty$ $(z \to a)$

(iii) a **wesentliche Singularität**: Ist $K(a,r) \subseteq \Omega$, so ist $f(K(a,r) \backslash \{a\})$ dicht in $\mathbb{C}$ (Satz von Casorati-Weierstraß)

Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex, $f \in H(\Omega)$ und γ ein ssd geschlossener Weg in Ω. Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 :\ f^{(n)}(z) \cdot \mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \quad (z \in \Omega \backslash \gamma^*)$

Cauchy'sche Ungleichungen: Sei $f \in H(K(z_0, R))$ und $|f(z)| \leq M$ $(z \in K(z_0, R))$. Dann gilt: $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M}{R^n}$

Ganzheit einer Funktion f: f ist auf $\mathbb{C}$ holomorph

Satz von Liouville: Ist $f \in H(\mathbb{C})$ beschränkt, so ist f konstant

Hauptsatz der Algebra: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann hat p genau n Nullstellen $z_1, ... z_n$ in $\mathbb{C}$ und es gilt: $p(z) = (z - z_1) \cdot ... \cdot (z - z_n)$

Satz von der Gebietstreue: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(\Omega)$. Dann ist entweder $f(\Omega)$ ein Gebiet oder f ist konstant

Maximumprinzip: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(\Omega)$. Hat $|f|$ in Ω ein lokales Maximum, so ist f konstant

Minimumprinzip: Ist $f(z) \neq 0$ $(z \in \Omega)$ und hat $|f|$ ein lokales Minimum in Ω, so ist f konstant

Korollar: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in Ω. Dann gilt: $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$

Schwarz'sches Lemma: Sei $f \in H(K(0,1))$, $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ $(z \in K(0,1))$. Dann gilt:

(i) $|f(z)| \leq |z|$ $(z \in K(0,1))$ und $|f'(0)| \leq 1$

(ii) $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in K(0,1) \backslash \{0\}$ g.d.w. $f(z) = cz$ mit $|c| = 1$

(iii) $|f'(0)| = 1$ g.d.w. $f(z) = cz$ mit $|c| = 1$

Das lokale Abbildungsverhalten

Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\varphi \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Menge $V \subseteq \Omega$ mit $z_0 \in V$, so dass gilt:

(i) φ ist injektiv auf V

(ii) $W := \varphi(V)$ ist offen

(iii) $\Psi : W \to V$ definiert durch $\Psi(\varphi(z)) = z$ (Umkehrfunktion von $\varphi|_V$ ist aus $H(W)$ und $\Psi'(z) = \frac{1}{\varphi'(\Psi(z))}$

Schlichtheit von f: $f \in H(\Omega$ injektiv auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet

Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(\Omega)$ nicht konstant und $z_0 \in \Omega$ sei eine Nullstelle m-ter Ordnung von $f(z) - f(z_0)$. Dann existiert eine offene Menge $U \subseteq \Omega$ mit $z_0 \in U$ und eine Kreisscheibe $K(0,r)$ und eine holomorphe Funktion $g : U \to K(0,r)$ mit:

(i) $f(z) = f(z_0) + (g(z))^m \ (z \in U)$

(ii) $g : U \to K(0,r)$ ist bijektiv

(iii) Für jedes $w \in f(U),\ w \neq f(z_0)$ gibt es genau m Urbilder $z_1, ..., z_m \in U$

Folgen holomorpher Funktionen

Kompakte Konvergenz von (f_n) Folge in $H(\Omega),\ \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$: zu jeder kompakten Teilmenge K von Ω und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 = n_0(K, \varepsilon)$ mit: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad (z \in K, n \geq n_0)$

Konvergenzsatz von Weierstraß: Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, (f_n) Folge in $H(\Omega)$ und (f_n) konvergiere kompakt gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann gilt: $f \in H(\Omega)$ und (f_n') konvergiert kompakt gegen f'.

Der globale Cauchy'sche Integralsatz

Kette: $\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus ... \oplus \gamma_n$ mit $\int_M f(z)\ dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\ dz$

- $\gamma_1, .., \gamma_n$: ssd Wege
- $M := \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup ... \cup \gamma_n^* = \Gamma^*$
- Zwei Ketten Γ_1, Γ_2 sind gleich wenn $\Gamma_1^* = \Gamma_2^*$ und $\int_{\Gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\ dz\ \forall\ f \in C(\Gamma_1^*, \mathbb{C})$
- Γ_-: ersetze jedes γ_j durch $\gamma_{j-} \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma_-} f(z)\ dz = -\int_\Gamma f(z)\ dz$

Kette in Ω: Kette in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $M \subseteq \Omega$

Zykel: Kette Γ mit Darstellung $\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus ... \oplus \gamma_n$, so dass alle γ_j geschlossen sind

Umlaufzahl eines Zykels Γ für $\alpha \notin \Gamma^*$: $\operatorname{ind}_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha}$

- $\Rightarrow \operatorname{ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{j=1}^n \operatorname{ind}_{\gamma_j}(\alpha)$

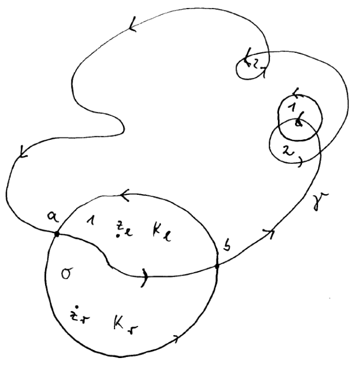
Addition von Ketten: $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma f(z)\ dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\ dz$

Cauchy'scher Integralsatz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$ und Γ ein Zykel in Ω mit $\operatorname{ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C} \backslash \Omega)$. Dann gilt:

(i) $f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\ dw\ (z \in \Omega \backslash \Gamma^*)$ und $\int_\Gamma f(z)\ dz = 0$

(ii) Sind Γ_1, Γ_2 Zykel in Ω mit $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}(\alpha) \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(\alpha)\ (\alpha \in \mathbb{C} \backslash \Omega)$, so gilt: $\int_{\Gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\ dz$

Bestimmung der Umlaufzahl: γ zerlege einen positiv orientierten Kreis in zwei Gebiete K_l und K_r. Dann gilt: $\operatorname{ind}_\gamma(z_l) = \operatorname{ind}_\gamma(z_r) + 1\ (z_l \in K_l,\ z_r \in K_r)$



Einfach zusammenhängende Gebiete

Homotopie von $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ **in** $A \subseteq \mathbb{C}$: $\exists$ stetige Funktion $H : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ mit...

(i) $H([0,1]^2) \subseteq A$

(ii) $H(s,0) = \gamma_0(s),\ H(s,1) = \gamma_1(s),\ H(0,t) = H(1,t) \quad (t, s \in [0,1])$

Nullhomotopie von γ_0 in A: γ_0 und γ_1 homotop in A und γ_1 konstant

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ **einfach zusammenhängend**: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und jeder geschlossene Weg in Ω ist nullhomotop in Ω

Satz:

(i) Es seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ ssd geschlossene Wege, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|$ $(s \in [0,1])$. Dann gilt $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{ind}_{\gamma_0}(\alpha)$

(ii) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ ssd geschlossene Wege und homotop in Ω. Dann gilt $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{ind}_{\gamma_0}(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{C}\backslash\Omega)$

(iii) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gilt für jeden geschlossenen ssd Weg γ in Ω: $\mathrm{ind}_\gamma(\alpha) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{C}\backslash\Omega)$

Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gilt für jedes $f \in H(\Omega)$ und jeden ssd geschlossenen Weg γ in Ω:

(i) $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$

(ii) $\mathrm{ind}_\gamma(z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\ d\xi \quad (z \in \Omega\backslash\gamma^*, k \in \mathbb{N}_0)$

Der Residuensatz

Meromorphie von f auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen: $\exists$ Menge $A \subseteq \Omega$ mit...

(i) A hat keinen Häufungspunkt in Ω

(ii) $f \in H(\Omega\backslash A)$

(iii) jedes $a \in A$ ist ein Pol von f

Hauptteil von f in $a \in A$: $Q(z) = \int_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k}$

Residuum von f in $a \in A$: $\mathrm{Res}\,(f, a) := c_1$

- Für Zykel gilt: $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{c_1}{z-a}\ dz = \mathrm{Res}\,(Q, a) \cdot \mathrm{ind}_\Gamma(a)$

Residuensatz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, f meromorph auf Ω und A die Menge der Pole von f. Ist Γ ein Zykel in $\Omega\backslash A$ mit $\mathrm{ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{C}\backslash\Omega)$, so gilt: $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\ dz = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}\,(f, a) \cdot \mathrm{ind}_\Gamma(a)$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, γ ein ssd geschlossener Weg in Ω, $\mathrm{ind}_\gamma(\alpha) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{C}\backslash\Omega)$ und $\mathrm{ind}_\gamma(\alpha) \in \{0,1\}$ $(\alpha \in \Omega\backslash\gamma^*)$. Sei $\Omega_1 := \{z \in \Omega : \mathrm{ind}_\gamma(z) = 1\}$. Für jedes $f \in H(\Omega)$ sei N_f die Anzahl der Nullstellen von f in Ω_1 einschließlich ihrer Vielfachheit.

(i) **Argumentprinzip**: Ist $f \in H(\Omega)$ und $0 \notin f(\gamma^*)$, so gilt $N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz$

(ii) **Satz von Rouché**: Sind $f, g \in H(\Omega)$ und ist $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ $(z \in \gamma^*)$, so gilt $N_g = N_f$.

Berechnung uneigentlicher Integrale: Es sei $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion mit grad $Q \geq$ grad $P + 2$ und $Q(x) \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\ dx = 2\pi i \sum_{z:\mathrm{Im}\ z>0} \mathrm{Res}\,(R, Z)$

Laurent-Reihen

Ringgebiet: $K(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$

Entwicklungssatz von Laurent: Sei $0 \leq r < R$ und $f \in H(K(z_0, r, R))$. Dann ist f eindeutig in eine Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ entwickelbar, wobei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ auf $K(z_0, R)$ und $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ auf $\{z : |z - z_0| > r\}$ kompakt. konvergieren.

- Dabei gilt: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\ d\xi \ \ (n \in \mathbb{Z},\ \gamma(t) = \varrho e^{it} + z_0\ (t \in [0, 2\pi]), r < \varrho < R)$
- z_0 ist hebbare Singularität $\Leftrightarrow a_n = 0\ (n \leq -1)$
- z_0 ist Pol m-ter Ordnung $\Leftrightarrow a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0\ (n < -m)$
- z_0 ist wesentliche Singularität $\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{Z} : n < 0, a_n \neq 0\}$ ist endlich
- Hauptteil von f: $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$
- $\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}$

Residuensatz für Laurent-Reihen: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subseteq \Omega$, A hat keinen Häufungspunkt in Ω und $f \in H(\Omega \backslash A)$. Ist Γ ein Zykel in $\Omega \backslash A$ mit $\operatorname{ind}_\Gamma(\alpha) = 0\ (\alpha \in \mathbb{C} \backslash \Omega)$, so gilt: $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\ dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma(a)$

Eine Anwendung des Schwarz'schen Lemmas

Blaschkefaktor: Möbiustransformation $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (a \in \mathbb{C},\ |a| < 1)$

Automorphismen des Einheitskreises: Es sei $f \in H(K(0,1)),\ f(K(0,1)) = K(0,1)$ und f injektiv. Es sei a das Urbild der 0, d.h. $f(a) = 0$. Dann existiert ein c mit $|c| = 1$, so dass $f(z) = c\varphi_a(z)$ gilt.

Harmonische Funktionen

Laplace-Operator: $\Delta u := u_{xx} + u_{yy}$

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ **harmonisch**: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, u zweimal stetig db mit $\Delta u = 0$

Konjugiert harmonische Funktion: $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = u(z) + iv(z)$ holomorph auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet

Poisson'sche Integralformeln für $f(z) = u(z) + iv(z)$: $f : \overline{K(0,1)} \to \mathbb{C}$ stetig, $f \in H(K(0,1))$, $z = re^{i\varphi}$, $r \in [0,1),\ \varphi \in [0, 2\pi]$:

(i) $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi - t)}\ dt$

(ii) $v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{r\sin(\varphi - t)}{1+r^2-2r\cos(\varphi - t)}\ dt$

Satz: Sei $h : \partial K(0,1) \to \mathbb{R}$ stetig und $f : \overline{K(0,1)} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} h(e^{it})\ dt & |z| < 1 \\ h(z) & |z| = 1 \end{cases}$.
Dann ist $f \in H(K(0,1))$ und $\operatorname{Re} f$ auf $\overline{K(0,1)}$ stetig.