Elemente der Geometrie - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2006/07, Dr. Drumm

Einige Ergebnisse der euklidischen Geometrie

Vorbereitungen

Satz von Vieta: Sind x_1, x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$, so ist b das Produkt und $-a$ die Summe dieser Lösungen.

Sehnen- / Sekantensatz: Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt $A \notin k$. Schneidet eine Gerade g durch A den Kreis k in den Punkten P, Q, so ist das Produkt $d(A,P) \cdot d(A,Q)$ unabhängig von der Wahl von g.

Sekanten-Tangenten-Satz: Für die Tangente $AB,\ B \in k$ gilt zusätzlich: $d(A,P) \cdot d(A,Q) = d^2(A,B)$

Goldener Schnitt: C teilt $\overline{AB}$ wie folgt: $\frac{d(A,B)}{d(A,C)} = \frac{d(A,C)}{d(B,C)}$

Peripheriewinkel / Umfangwinkel: $\sphericalangle APB$ über einem Kreisbogen AB mit $P \in k(M)$

Zentriwinkel / Mittelpunktswinkel: $\sphericalangle AMB$ über einem Kreisbogen AB des Kreises $k(M)$

Satz zu Peripherie- und Zentriwinkeln: Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist halb so groß wie der Zentriwinkel über demselben Bogen

Satz von Thales: Alle Peripheriewinkel über einem Halbkreis sind rechte Winkel

Fläche eines Dreiecks:

- $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$
- $A(P_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (vorzeichenbehaftet)

Bewegung b: Selbstabbildung des euklidischen Raums E^d, die alle Abstände invariant lässt.

- Im kartesischen Koordinatensystem gilt: $b : \begin{cases} E^d \to E^d \\ X \to X^*,\ \vec{x}^* = \mathcal{B} \cdot \vec{x} + \vec{t} \end{cases}$
  - $\mathcal{B}$: orthogonale Matrix, d.h. $\mathcal{B}^T\mathcal{B} = \mathcal{E}_d$
- Bewegungen der euklidischen Ebene E^2:

	Rg $(\mathcal{B} - \mathcal{E}_2) = 2$	Rg $(\mathcal{B} - \mathcal{E}_2) = 1$	Rg $(\mathcal{B} - \mathcal{E}_2) = 0$
$\lvert\mathcal{B}\rvert = +1$	**Drehung** Spezialfall: Punktspiegelung	X	**Translation** Spezialfall: Identität
$\lvert\mathcal{B}\rvert = -1$	X	**Gleitspiegelung** Spezialfall: Geradenspiegelung	X

- Bewegungen des euklidischen Raums E^3:

	Rg $(\mathcal{B}-\mathcal{E}_3)=3$	Rg $(\mathcal{B}-\mathcal{E}_3)=2$	Rg $(\mathcal{B}-\mathcal{E}_3)=1$	Rg $(\mathcal{B}-\mathcal{E}_3)=0$
$\lvert\mathcal{B}\rvert=+1$	X	**Schraubung** Spezialfall: Drehung um Gerade	X	**Translation** Spezialfall: Identität
$\lvert\mathcal{B}\rvert=-1$	**Drehspiegelung**, falls Rg $(\mathcal{B}+\mathcal{E}_3)=2$ **Punktspiegelung**, falls Rg $(\mathcal{B}+\mathcal{E}_3)=0$	X	**Gleitspiegelung** Spezialfall: Ebenenspiegelung	X

Teilverhältnis dreier kollinearer Punkte P_1, P_2, P_3: $TV(P_1,P_2,P_3)=\frac{\hat{d}(P_1,P_3)}{\hat{d}(P_3,P_2)}$

- $\hat{d}(P,Q)$: orientierter Abstand von P und Q
- Das Teilverhältnis ist invariant unter Parallelprojektion

Doppelverhältnis: $DV(A,B,C,D)=\frac{TV(A,B,C)}{TV(A,B,D)}=\frac{\hat{d}(A,C)}{\hat{d}(C,B)}:\frac{\hat{d}(A,D)}{\hat{d}(D,B)}$

- $DV(A,B,C,D)=DV(B,A,D,C)=DV(C,D,A,B)=DV(D,C,B,A)$
- $DV(B,A,C,D)=\frac{1}{DV(A,B,C,D)}$
- Das Doppelverhältnis ist invariant unter Zentralprojektion

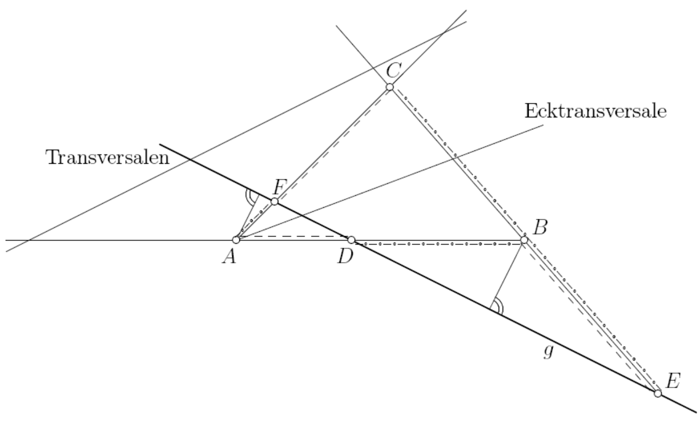
Geradenbüschel: einparametrige Schar aller Geraden der Ebene durch einen festen Punkt

<u>Das Dreieck</u>

Transversale: Gerade, die jede Trägergerade der Seiten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneidet

Satz des Menelaos: Eine Transversale g, die keine Ecktransversale ist, schneidet die drei Trägergeraden der Dreiecksseiten derart, dass das Produkt der Teilverhältnisse -1 ist.

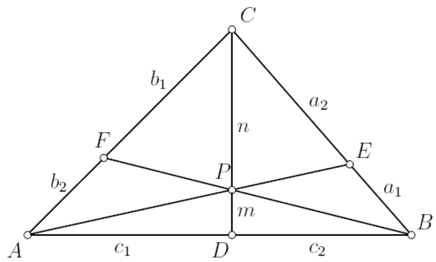
- $TV(A,B,D)\cdot TV(B,C,E)\cdot TV(C,A,F)=-1$
- $\frac{\hat{d}(A,D)}{\hat{d}(D,B)}\cdot\frac{\hat{d}(B,E)}{\hat{d}(E,C)}\cdot\frac{\hat{d}(C,F)}{\hat{d}(F,A)}=-1$



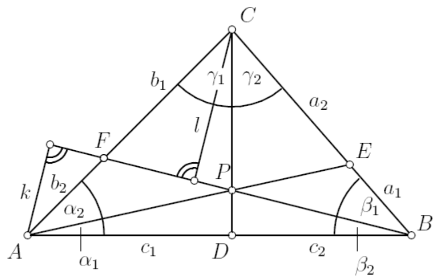
Satz des Ceva: Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt P (innerhalb oder außerhalb des Dreiecks), so gelten folgende Aussagen:

(i) Die Transversalen teilen die Dreiecksseiten so, dass das Produkt der Teilverhältnisse $+1$ ist.

$$TV(A,B,D) \cdot TV(B,C,E) \cdot TV(C,A,F) = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = +1$$



(ii) Die Transversalen teilen die Winkel so, dass gilt: $\frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2} = 1$



Umkehrung des Satzes von Ceva:

(i) Werden durch drei Ecktransversalen die drei Seiten innen oder zwei außen und eine innen so geteilt, dass $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = +1$ gilt, so schneiden sich die Ecktransversalen in einem Punkt oder sie sind parallel.

(ii) Werden durch drei Ecktransversalen die drei Seiten innen oder zwei außen und eine innen so geteilt, dass $\frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2} = 1$ gilt, so schneiden sich die Ecktransversalen in einem Punkt oder sie sind parallel.

Sätze am Dreieck:

- Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, dem **Schwerpunkt** S des Dreiecks.
- Die Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, dem **Inkreismittelpunkt** des Dreiecks.
- Die Höhen schneiden sich in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt** H des Dreiecks.
- Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt, dem **Umkreismittelpunkt** M des Dreiecks.
- Die Schnittpunkte S, H, M liegen auf einer Geraden (**Euler'sche Gerade**) und es gilt: $d(H,S) = 2 \cdot d(S,M)$.
- Auf der Euler'schen Geraden liegt auch der Mittelpunkt N des **Feuerbach'schen Kreises**, auf dem 9 ausgezeichnete Punkte des Dreiecks liegen, nämlich:
  - die 3 Seitenmittelpunkte
  - die 3 Höhenfußpunkte
  - die 3 Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte.

  N ist der Mittelpunkt von $\overline{HM}$.

Baryzentrische Koordinaten von $X \in E^2$ bezüglich des Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$:

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{p}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{p}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{p}_3,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$
- $\lambda_1 = \frac{A(XP_2P_3)}{A(P_1P_2P_3)}$ $[A(P_1P_2P_3)$: vorzeichenbehaftete Fläche von $\Delta P_1P_2P_3]$
- $\lambda_2 = \frac{A(P_1XP_3)}{A(P_1P_2P_3)}$
- $\lambda_3 = \frac{A(P_1P_2X)}{A(P_1P_2P_3)}$

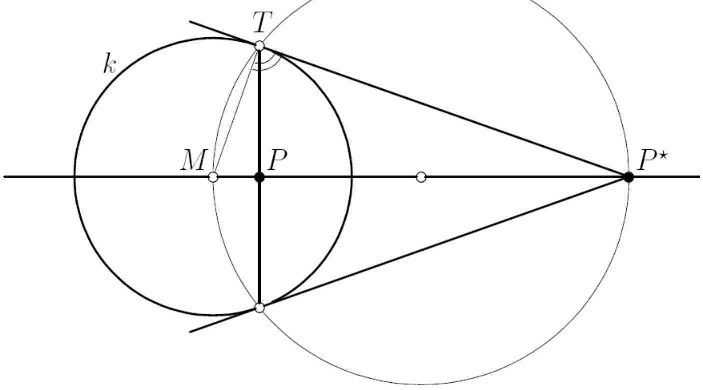
Kreis und Kugel

Isoperimetrische Ungleichung: Sind c eine doppelpunktfreie, geschlossene, ebene Kurve der Länge L und A die Fläche des von c berandeten Gebiets, so gilt: $L^2 - 4\pi \cdot A \geq 0$

- $L^2 - 4\pi \cdot A = 0 :\Leftrightarrow c$ ist ein Kreis

Inversion ι am Kreis $k = k(M, r)$:
Jedem Punkt $P \neq M$ wird der Punkt $P^* \in MP^+$ zugeordnet, für den $d(M, P) \cdot d(M, P^*) = r^2$ gilt.

- Eigenschaften:
  - ι ist eine Involution ($\iota \circ \iota = id$), also insbesondere bijektiv
  - genau die Punkte von k sind Fixpunkte von ι
  - Geraden durch M (ohne M) werden auf sich abgebildet.
- Konstruktion:
  - Liegt P im Inneren von k und ist T ein Schnittpunkt von k mit dem Lot von MP in P, so schneidet die Tangente von k in T die Gerade MP im Bildpunkt P^*.
  - Liegt P außerhalb von k, so hat man obige Konstruktion umzukehren.



Sätze zur Inversion am Kreis:

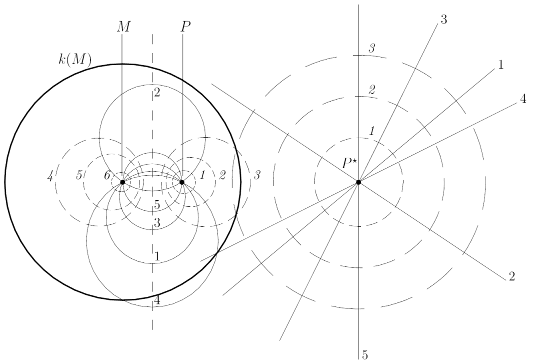
a) Sind k, k' zwei verschiedene Kreise und ι die Inversion am Kreis k, sind folgende Aussagen äquivalent:
   (i) $\iota(k') = k'$
   (ii) Es gibt Punkte $P, Q \in k'$ $(P \neq Q)$ mit $\iota(P) = Q$
   (iii) k und k' schneiden sich orthogonal

b) Die Inversion ι am Kreis $k(M, r)$ bildet jede Gerade g nicht durch M auf einen Kreis durch M (ohne den Punkt M) ab (und umgekehrt).

c) Die Inversion ι am Kreis $k(M, r)$ bildet Kreise nicht durch M auf Kreise nicht durch M ab.

d) Die Inversion ι am Kreis k ist winkeltreu.

Kreisscharen: Inversion ι am Kreis $k(M)$, P und P^* sind zueinander invers



Hyperbolisches Büschel: Menge der Kreise durch M und P

Elliptisches Büschel: Menge der Kreise, die zu allen Kreisen des hyperbolischen Büschels orthogonal sind

Parabolisches Büschel: Menge aller Kreise, die eine feste Gerade g in M berühren

Satz: Zwei Kreise k_1, k_2 gehören genau zu einem elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Kreisbüschel.

Schließungssatz von Steiner: Gegeben seien zwei Kreise k, k' so, dass k ganz im Inneren von k' liegt. Gibt es eine berührende Kreiskette $k_1, ..., k_N$, so dass...

(i) k_i den Kreis k von außen und k' von innen berührt ($i = 1...N$),

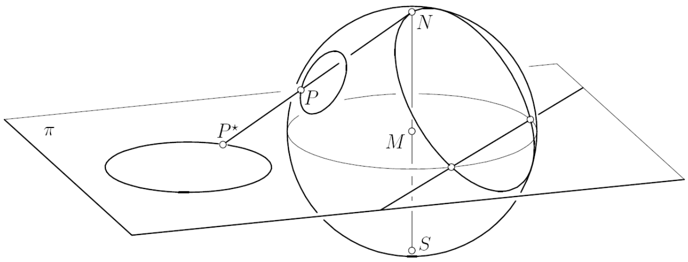
(ii) k_j den Kreis k_{j+1} ($j = 1, .., N-1$) sowie k_N den Kreis k_1 berührt,

so kann jeder Kreis, der k von außen und k' von innen berührt, zu einer solchen Kette ergänzt werden.

Großkreis: Kugelkreis, dessen Radius mit dem Kugelradius übereinstimmt

Stereographische Projektion: $\sigma : \Sigma \backslash \{N\} \to \pi$ mit: jedem Punkt $P \in \Sigma \backslash \{N\}$ wird der Schnittpunkt der Geraden PN mit π als Bildpunkt $P^* = \sigma(P)$ zugeordnet.

- Σ: Sphäre, $N \in \Sigma$ („Nordpol“), π: zu MN senkrechte Ebene, die N nicht enthält.
- Wohldefiniertheit ist gegeben, da PN für kein $P \in \Sigma \backslash \{N\}$ zu π parallel ist.
- Eigenschaften:
  (i) σ ist bijektiv
  (ii) Kugelkreise durch N (ohne N) werden auf Geraden abgebildet. Das Urbild jeder Geraden in π ist ein Kreis durch N (ohne N).
  (iii) σ ist winkeltreu
  (iv) Kugelkreise, die N nicht enthalten, werden auf Kreise abgebildet. Das Urbild jedes Kreises in π ist ein Kreis, der nicht durch N geht.



Grundkonstruktionen zur stereographischen Projektion:

a) Zu einem Bildpunkt A^* ist das Bild G^* des Gegenpunkts G von A zu konstruieren

b) Zu den Bildern A^*, B^* ist das Bild k^* des Großkreises k von Σ durch A und B zu konstruieren

c) Zu den Bildern A^*, B^* der Punkte A, B ist der wahre sphärische Abstand von A und B (also der Großkreisbogen von A nach B) zu konstruieren

d) Es ist der Schnittwinkel zweier Kreise zu konstruieren

e) Aus den Bildern A^*, B^*, C^* ist die wahre Gestalt des Kugeldreiecks ABC (also die Seitenlängen und Winkel) zu konstruieren.

Axiomatischer Aufbau der affinen und euklidischen Geometrie

Ein Axiomensystem der affinen Geometrie

Inzidenzstruktur: Tripel $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ mit Mengen $\mathbf{P}$ („Punkte"), $\mathbf{B}$ („Blöcke") und $I \subseteq \mathbf{P} \times \mathbf{B}$

- Gilt $I = \{(P, b) \in \mathbf{P} \times \mathbf{G} \mid P \in b\}$, $\mathbf{G}$ Potenzmenge von $\mathbf{P}$, so nennt man die Blöcke „Geraden" und schreibt $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$.

P **indiziert** mit b: $(P, b) \in I$

Geometrie / einfache Inzidenzstruktur: Inzidenzstruktur, in der es keine zwei Blöcke gibt, die mit derselben Punktmenge indizieren

Schneiden zweier geraden $g, h \in \mathbf{G}$ in einem Punkt $S :\Leftrightarrow g \cap h = S$

Parallelität zweier Geraden $g, h \in \mathbf{G}$: g, h schneiden sich nicht

Kollinearität der Punkte $A, B, C, ...$: $A, B, C, ...$ liegen auf einer Geraden

Kopunktalität der Geraden $g, h, k, ...$: $g, h, k, ...$ indizieren alle mit demselben Punkt P

Affine Inzidenzebene: Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ mit...

(A1) Zu je zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade g mit $A \in g,\ B \in g$

(A2) Zu jeder Gerade g und jedem Punkt A gibt es genau eine Gerade h mit $A \in h$ und $g || h$

(A3) Es gibt mindestens 3 nichtkollineare Punkte

Satz: In einer affinen Inzidenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ gilt:

a) Auf jeder Geraden g liegen mindestens zwei Punkte. Je zwei Geraden enthalten gleich viele Punkte.

b) Durch jeden Punkt gehen mindestens drei Geraden. Für alle Punkte A und B ist die Anzahl der Geraden, die jeweils durch A und B gehen, gleich.

c) Es gibt mindestens vier Punkte und mindestens sechs Geraden.

Ordnung der affinen Inzidenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$: $n \in \mathbb{N}$, falls es eine Gerade gibt, die genau n Punkte enthält

Kollineation: bijektive Abbildung $\gamma : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$, die alle kollinearen Punkte $A, B, C \in \mathbf{P}$ auf kollineare Punkte $\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C) \in \mathbf{G}'$ abbildet.

Fixpunkt von γ: $P \in \mathbf{P}$ mit $\gamma(P) = P$

Fixgerade von γ: $g \in \mathbf{G}$ mit $\gamma(g) = g$

Zentrum von γ: $P \in \mathbf{P}$ mit: jede Gerade g durch P ist Fixgerade von γ

Achse von γ: $g \in \mathbf{G}$ mit: jeder Punkt auf g ist Fixpunkt von γ

Spur von γ: $g \in \mathbf{G}$ mit: $\exists\ P \in g$ mit $\gamma(P) \neq P$ und $\gamma(P) \in g$

Homothetie / Dilatation: Kollineation $\alpha : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ mit $\alpha(g) \mid\mid g\ \forall\ g \in \mathbf{G}$

Translation: $\alpha = id$ oder α hat keinen Fixpunkt

Streckung: $\alpha = id$ oder α hat genau einen Fixpunkt (=Zentrum der Streckung)

Punktspiegelung an P: $\alpha \circ \alpha = id$, α Streckung mit Zentrum P

Menge der Kollineationen einer affinen Inzidenzebene auf sich: Γ

Menge der Translationen längs der Geraden g: $T_g = \{\alpha \in T | \alpha(g) = g\}$

Menge der Homothetien: H

Menge der Translationen: T

Menge der Streckungen mit Fixpunkt P: H_P

Lineare Transitivität von T: Zu je zwei Punkten A, B existiert eine Translation, die A auf B abbildet.

Translationsebene: Affine Inzidenzebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ mit...

(A4) Gruppe T der Translationen ist linear transitiv

Spread / Kongruenz: mindestens dreielementige Menge $\mathbf{B}$ von Untervektorräumen eines Vektorraums V über einem Schiefkörper $\mathbb{K}$, wenn gilt:

(i) V ist direkte Summe von je zwei verschiedenen Untervektorräumen aus $\mathbf{B}$

(ii) V ist Vereinigung aller Untervektorräume aus $\mathbf{B}$

$\mathbb{K} := \{a \in End(T) \mid a(T_g) \subseteq T_g \text{ für alle } g \in \mathbf{G}\}$

Satz: Jede Translationsebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ ist isomorph zu einer Translationsebene über einem Vektorraum mit spread

Desarguessche Ebene: Affine Inzidenzebene mit...

(A5) Jede Streckungsgruppe H_P ist linear transitiv, d.h. zu je zwei Punkten A, B, die kollinear mit P sind, gibt es eine Streckung α mit Zentrum P und $\alpha(A) = B$.

Pappussche Ebene: Affine Inzidenzebene mit...

(A6) Jede Streckungsgruppe H_P ist linear transitiv und abelsch

(d) Kleiner (affiner) Satz von Desargues:
Liegen die entsprechenden Ecken von zwei Dreiecken jeweils auf genau einer von drei parallelen Geraden und sind zwei Paare entsprechender Dreiecksseiten parallel, so ist auch das dritte Paar von Dreiecksseiten parallel.

- Eine affine Inzidenzebene ist genau dann eine Translationsebene, wenn (d) allgemein gilt

(D) Großer (affiner) Satz von Desargues:
Liegen die entsprechenden Ecken von zwei Dreiecken jeweils auf genau einer von drei kopunktalen Geraden und sind zwei Paare entsprechender Dreiecksseiten parallel, so ist auch das dritte Paar von Dreiecksseiten parallel.

- In jeder affinen Inzidenzebene folgt aus (D) stets (d)
- Eine affine Inzidenzebene ist genau dann eine Desarguessche Ebene, wenn (D) allgemein gilt

(p) Kleiner (affiner) Satz von Pappus:
Liegen die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei parallelen Geraden, jedoch keine Ecke auf beiden gleichzeitig, und sind zwei Paare von Gegenseiten parallel, so ist auch das dritte Paar von Gegenseiten parallel.

(P) Großer (affiner) Satz von Pappus:
Liegen die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, jedoch keine Ecke auf beiden gleichzeitig, und sind zwei Paare von Gegenseiten parallel, so ist auch das dritte Paar von Gegenseiten parallel.

- In jeder affinen Inzidenzebene folgt aus (P) stets (D)
- Eine affine Inzidenzebene ist genau dann eine Papussche Ebene, wenn (P) allgemein gilt

<u>Ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie</u>

Absolute Ebene: Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ mit Abbildung $d : \begin{cases} \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto d(A, B) \end{cases}$ + Axiome I bis IV

- $d(A, B)$: Abstand der Punkte A und B

Euklidische Ebene: Absolute Ebene mit zusätzlich Axiom V

I Inzidenzaxiome:

(1) Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Gerade g, die beide Punkte enthält ($g = PQ$)

(2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte

(3) Es gibt drei Punkte, die nicht derselben Geraden angehören

Parallelität zweier Geraden: Geraden schneiden sich nicht

Kollinearität der Punkte $A, B, C, ...$: $A, B, C, ...$ liegen auf einer Geraden

II Abstandsaxiome:

(1) Für alle Punkte A, B gilt: $d(A, B) \geq 0$ und $d(A, B) = 0$ genau für $A = B$

(2) Für alle Punkte A, B gilt: $d(A, B) = d(B, A)$

(3) Für alle Punkte A, B, C gilt: $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$
Die Punkte sind genau dann kollinear, wenn eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:
   - $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$
   - $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$
   - $d(B, A) + d(A, C) = d(B, C)$

Punkt B **liegt zwischen** den Punkten A und C: $Zw(A, B, C) :\Leftrightarrow d(A, B) + d(B, C) = d(A, C),\ B \neq A,\ B \neq C$

Offene Strecke: $(AB) := \{P \in \mathbf{P} : Zw(A, P, B)\}$

(Abgeschlossene) **Strecke** / Verbindungsstrecke: $\overline{AB} := (AB) \cup \{A, B\}$

(Abgeschlossene) **Halbgeraden** / Strahlen mit Anfangspunkt A:

- $AB^+ := \{P \in \mathbf{P} | Zw(A, P, B)$ oder $Zw(A, B, P)$ oder $P = B$ oder $P = A\}$
- $AB^- := \{P \in \mathbf{P} | Zw(P, A, B)$ oder $P = A\}$
- Ohne Anfangspunkt: offene Halbgeraden
- $AB^+ \cap AB^- = \{A\}$ und $AB^+ \cup AB^- = AB$

III Anordnungsaxiome:

(1) Zu jedem Punkt P und jeder reellen Zahl $a \geq 0$ gibt es auf jeder Halbgeraden mit dem Anfangspunkt P genau einen Punkt R mit $d(P, R) = a$

(2) Jede Gerade g teilt die Menge $\mathbf{P} \backslash g$ so in zwei nichtleere Mengen (genannt die **offenen Halbebenen mit der Randgeraden** g), dass
   (a) die Verbindungsstrecke zweier Punkte, die nicht in derselben Menge liegen, die Gerade g schneidet,
   (b) die Verbindungsstrecke zweier Punkte, die in derselben Menge liegen, die Gerade g nicht schneidet.

Abgeschlossene Halbebenen: mit Randgeraden

Halbebene: $H = ABC^+$, falls AB Randgerade von H und $C \notin AB,\ C \in H$

Dreieck: $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

- $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$: Seiten

Satz von Pasch: Liegt auf der Geraden g keine Ecke des Dreiecks ΔABC, so gilt: schneidet g die Seite $\overline{AB}$, so schneidet g auch genau eine der Seiten $\overline{BC},\ \overline{CA}$

Winkel: $\sphericalangle PSQ = SP^+ \cup SQ^+$

- $SP^+,\ SQ^+$: Schenkel

- S: Scheitel
- $In\sphericalangle PSQ = PSQ^+ \cap QSP^+$: **Innere** des Winkels

Bewegung: surjektive Abbildung $b : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, die alle Abstände unverändert lässt $d(A,B) = d\left(b(A), b(B)\right)\ \forall\ A, B \in \mathbf{P}$

IV Bewegungsaxiom: Für $d(A,B) = d(P,Q) > 0$ gibt es genau zwei Bewegungen b_1, b_2, die A auf P und B auf Q abbilden. Ist H eine Halbebene mit der Randgeraden AB, so gilt dabei $b_1(H) \neq b_2(H)$.

Fahne: Tripel $F = (P, h, H)$ mit Punkt P, $h = PQ^+$ Halbgerade und H Halbebene mit Randgerade PQ

Fahnensatz: Sind $F = (P, h, H)$ und $F' = (P', h', H')$ Fahnen, so gibt es genau eine Bewegung b, die F auf F' abbildet (für die also $b(P) = P',\ b(h) = h'$ und $b(H) = H'$ gilt).

Geradenspiegelung: $P = P',\ h = h',\ H \neq H'$

Punktspiegelung: $P = P',\ h = PQ^+,\ h' = PQ^-,\ H \neq H'$

Drehung: $P = P',\ h = PQ^+,\ h' = PR^+,\ H = PQR^+,\ H' = PRQ^-$

Translation: $P \neq P',\ h' \subseteq h \subseteq PP',\ H = H'$

V (euklidisches) Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und jedem nicht auf g liegenden Punkt P gibt es höchstens eine Gerade, die P enthält und zu g parallel ist.

Kongruenz zweier Mengen M_1, M_2: $M_1 \cong M_2 :\Leftrightarrow\ \exists$ Bewegung b mit $b(M_1) = M_2$

Kongruenzsatz sws:
Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ sind kongruent

Kongruenzsatz wsw:
Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ sind kongruent

Basiswinkelsatz:
Sind in ΔABC die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ kongruent, so sind auch die Basiswinkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ kongrent

Mittelpunkt der Strecke AB: P mit $\overline{AP} \cong \overline{PB}$

Satz: Jede Strecke besitzt genau einen Mittelpunkt

Winkel $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle(SP^+, SQ^+)$

Winkelhalbierende von $\sphericalangle PSQ$: Halbgerade $SR^+ \subseteq In\sphericalangle PSQ$ für $\sphericalangle PSR \cong \sphericalangle RSQ$, falls $\sphericalangle PSQ$ kein gestreckter Winkel

- Gilt $d(S,P) = d(S,Q)$ und $T \in \overline{PQ}$, so ist ST^+ genau dann Winkelhalbierende, wenn T Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist
- $\sphericalangle PSQ$ besitzt genau eine Winkelhalbierende

Nebenwinkel zu $\sphericalangle(SP^+, SQ^+)$: $\sphericalangle(SP^+, SQ^-)$ und $\sphericalangle(SP^-, SQ^+)$

- Die beiden Nebenwinkel eines Winkels sind kongruent
- Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent

Scheitelwinkel zu $\sphericalangle(SP^+, SQ^+)$: $\sphericalangle(SP^-, SQ^-)$

- Jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent

Rechter Winkel: $\sphericalangle(SP^+, SQ^+)$ mit $\sphericalangle(SP^+, SQ^+) \cong \sphericalangle(SP^-, SQ^+)$

- Zu jeder Halbgeraden SP^+ gibt es in jeder Halbebene H mit der Randgeraden SP genau einen rechten Winkel $\sphericalangle(SP^+, SQ^+)$

Spitzer Winkel: $\sphericalangle(p,q)$ mit: $\exists$ rechter Winkel $\sphericalangle(p,r)$ mit $q \subseteq In\sphericalangle(p,r)$ und $q \neq r$

Stumpfer Winkel: Winkel, der nicht spitz ist

Orthogonalität:

- Zwei Geraden heißen zueinander **senkrecht oder orthogonal** ($k \perp l$), wenn es Halbgeraden $p \subseteq k$ und $q \subseteq l$ gibt, die einen rechten Winkel $\sphericalangle(p,q)$ bilden (also insbesondere den gleichen Anfangspunkt haben)
- Für $L \in l$ heißt l das **Lot** von L auf k und der Schnittpunkt F der Geraden k und l dessen **Fußpunkt**
- Ist F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ} \subseteq k$, so heißt l **Mittelsenkrechte** dieser Strecke

Kongruenzsatz sss:
Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ sind kongruent

Winkel im Dreieck:

- **Innenwinkel** im Dreieck ΔABC : $\sphericalangle(AB^+, AC^+)$, $\sphericalangle(BA^+, BC^+)$, $\sphericalangle(CA^+, CB^+)$
- **Außenwinkel**: Nebenwinkel der Innenwinkel

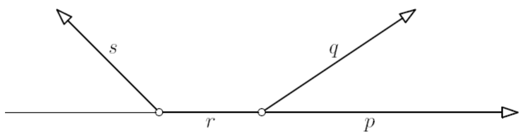
Lemma: Die Innenwinkelsumme IWS eines Dreiecks beträgt höchstens π

Satz: Gibt es ein Dreieck ΔABC mit $IWS(ABC) = \pi$, so hat jedes Dreieck die Innenwinkelsumme π

Abstand $d(P,g)$ eines Punktes P von einer Geraden g: Abstand $d(P,F)$ von P zum Lotfußpunkt F des Lotes von P auf g

Stufenwinkel: Zwei Winkel, bei denen ein Schenkel p des einen Winkels Teilmenge eines Schenkels r des anderen Winkels ist und die beiden übrigen (sogenannten freien) Schenkel in derselben von der Geraden $g \supseteq p, r$ berandeten Halbebene liegen

Stufenwinkelsatz: Sind die Stufenwinkel $\sphericalangle(SQ^+, SR^+)$ und $\sphericalangle(S'Q'^+, S'R'^+)$ kongruent, so sind die Trägergeraden der freien Schenkel parallel



Äquivalenzen zum Parallelenaxiom:

(i) Es gilt das Parallelenaxiom V: Zu jeder Geraden g und jedem nicht auf g liegenden Punkt P gibt es höchstens eine Gerade, die P enthält und zu g parallel ist

(ii) Zu jeder Geraden g und jedem nicht auf g liegenden Punkt P gibt es genau eine Gerade, die P enthält und zu g parallel ist

(iii) Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent

(iv) In jedem Dreieck Δ gilt $IWS(\Delta) = \pi$

(v) Es gibt ein Dreieck Δ mit $IWS(\Delta) = \pi$

(vi) Abstandslinien sind Geraden

(vii) Es gibt ein Saccheri-Viereck (Viereck mit $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABC$ rechte Winkel und $d(A,D) = d(B,C)$), das die Hypothese vom rechten Winkel erfüllt

(viii) Es gibt zwei Dreiecke mit übereinstimmenden Innenwinkeln, die nicht kongruent sind

Hyperbolische Geometrie

V' Hyperbolisches Parallelenaxiom: Es gibt eine Gerade g und einen nicht auf g liegenden Punkt P, durch den mindestens zwei Geraden gehen, die g nicht schneiden

Hyperbolische / Lobatschewski-Ebene: Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ mit Abbildung: $d : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbb{R}$, in der die Axiome I-IV und V' gelten

Satz: In der hyperbolischen Ebene gibt es zu jeder Gerade g und jedem Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden, die P enthalten und g nicht schneiden

Kongruenzsatz www: Stimmen zwei Dreiecke der hyperbolischen Ebene in allen drei Winkeln überein, so sind sie kongruent

Satz: In jedem Dreieck Δ der hyperbolischen Ebene gilt $IWS(\Delta) < \pi$

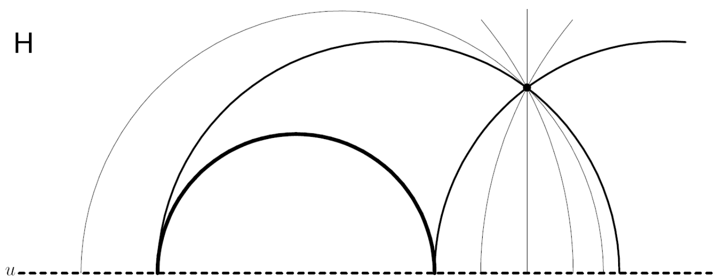
Grenzwinkel: $\gamma := \lim_{d(A,A_1)\to\infty} \sphericalangle APA_1$ für Gerade a, $A_1 \in a, P \notin a$ und $A \in a$ Fußpunkt des Lotes von P auf a

Grenzparallele in P zu a: Gerade PB, für die $\sphericalangle(PA^+, PB^+) = \gamma$ gilt
($P \notin a,\ A \in a$ Fußpunkt des Lotes von P auf a)

Überparallele: jede Parallele zu a in P, die nicht grenzparallel ist

Poincaré-Modell (Modell für die hyperbolische Ebene): offene Halbebene H mit Randgerade u der euklidischen Ebene

Schauplatz und Gerade im Poincaré-Modell:

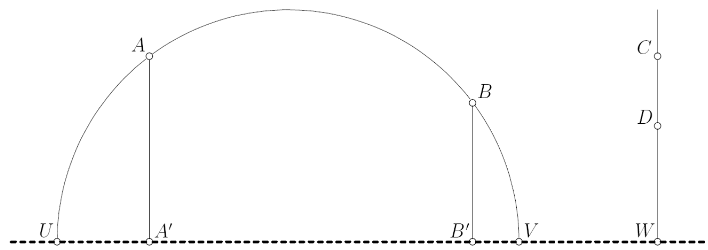


Geradenmenge G_H (H-Gerade): Vereinigung der Mengen $G_1 = \{k(M) \cap H \mid M \in u\}$ und
$G_2 = \{AB^+ \setminus \{A\} \mid A \in u, B \in H, AB \perp u\}$

H-Punkte: Punkte der hyperbolischen Ebene

Uneigentliche Punkte: Punkte der Randgeraden u, die nicht zur Halbebene H gehören

H-Abstand: $d_H(A,B) := \frac{1}{2}\left|\ln DV(A', B', U, V)\right|$, $d_H(C,D) := \left|\ln \frac{\hat{d}(D,W)}{\hat{d}(C,W)}\right| = |\ln(-TV(C,D,W)|$



Lemma: $(H, G_H, \in)$ erfüllt mit dem H-Abstand die Axiome I-IV + V'

H-Bewegung: Eine der folgenden Abbildungen der euklidischen Ebene eingeschränkt auf die Halbebene H:

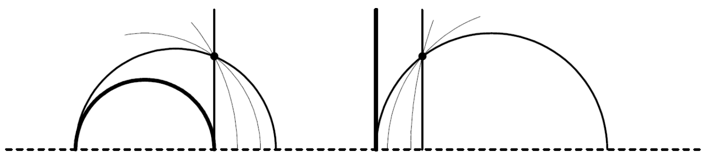
(i) Verschiebungen parallel zur Randgeraden u

(ii) Spiegelungen an Geraden senkrecht zu u

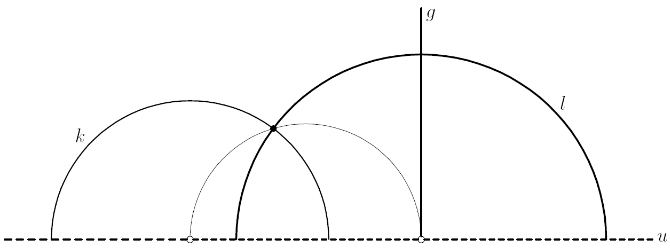
(iii) zentrische Streckungen mit positivem Streckungsfaktor und Zentrum auf u

(iv) Die Einschränkung einer Inversion ι an einem Kreis $k(M,r),\ M \in u$ auf H

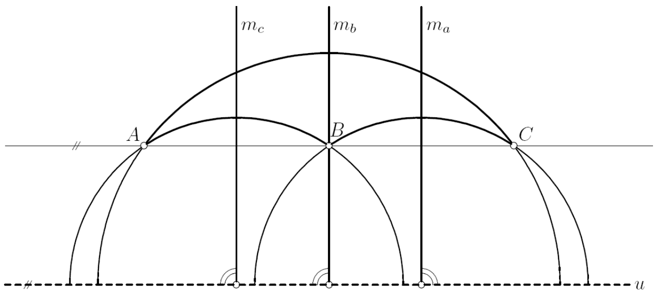
Parallele Geraden im Poincaré-Modell:



Gemeinlot l von g und k im Poincaré-Modell:



Gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit nicht schneidenden Mittelsenkrechten im Poincaré-Modell:

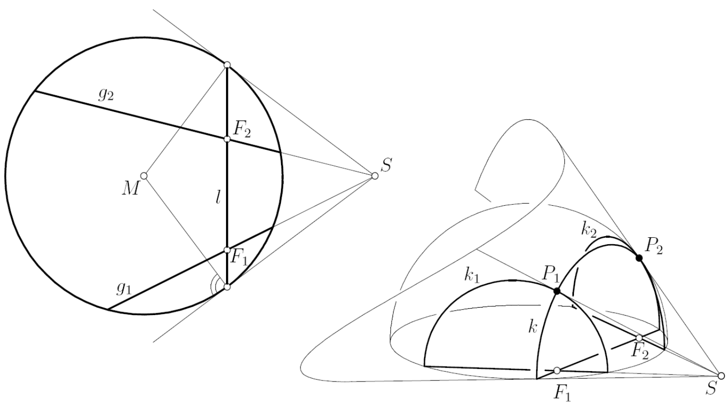


Modell 2: *Schauplatz*: offene Nordhalbkugel Σ_0 (Randkreis k: Äquatorkreis in der Ebene $x_3 = 0$)
Geraden: Halbkreise senkrecht zu k (also in Ebenen senkrecht zur Äquatorebene)

Modell 3: *Schauplatz*: Inneres des Einheitskreises k
Geraden: Kreisbögen, die k senkrecht treffen, und (offene) Durchmesser von k

Beltrami-Klein-Modell: *Schauplatz*: Inneres des Einheitskreises k
Geraden: offene Sehnen von k

Gemeinlot zweier überparalleler Geraden g_1, g_2 im Beltrami-Klein-Modell: l (siehe Abbildung)



Nichteuklidische Geometrien

Die projektive Ebene

Projektive Ebene $\mathbf{P}^2$: Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ mit...

(1) Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau einen Block, der mit ihnen indiziert

(2) Jeder Block indiziert mit mindestens zwei Punkten

(3) Es gibt drei Punkte, die nicht mit demselben Block indizieren

(4) Je zwei verschiedene Blöcke indizieren mit einem Punkt

Projektive Ebene $\mathbf{P}^2$ (isomorphe Definition): Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ mit...

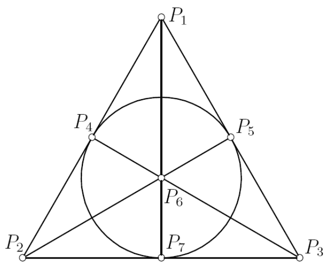
(1) Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Gerade g, die beide Punkte enthält (Bezeichnung $g = PQ$)

(2) Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte

(3) Es gibt drei Punkte, die nicht derselben Geraden angehören

(4) Je zwei verschiedene Geraden haben einen Punkt gemeinsam

Minimalmodell der projektiven Ebene:



Duale Geometrie G^d: Vertauschen der Begriffe „Punkt" und „Gerade" im Axiomensystem und Umkehren der Inzidenz

Duale Aussage A^d: Vertauschen der Begriffe „Punkt" und „Gerade" und Umkehren der Inzidenz in einer Aussage A

Dualitätsprinzip: Ist M eine Menge von Geometrien, die mit jeder Geometrie G auch die duale Geometrie G^d enthält, so gilt: Ist A eine Aussage, die für alle G aus M richtig ist, so ist auch A^d für alle G aus M richtig.

Duale Inzidenzaxiome (gelten in einer projektiven Ebene):

(1) Zu zwei verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt.

(2) Jeder Punkt liegt auf mindestens drei Geraden.

(3) Es gibt drei Geraden, die nicht durch denselben Punkt gehen.

(4) Zu zwei verschiedene Punkten gibt es eine Gerade, die diese Punkte enthält.

Dualitätsprinzip für projektive Ebenen: Ist M eine Menge projektiver Ebenen, die mit jeder projektiven Ebene auch die duale Ebene enthält, und gilt eine Aussage A für alle projektiven Ebenen aus M, so gilt auch die duale Aussage A^d für alle projektiven Ebenen aus M.

Endliche projektive Ebenen: In einer endlichen projektiven Ebene enthalten alle Geraden dieselbe Anzahl von Punkten.

Ordnung einer endlichen projektiven Ebene: $q := |g| - 1$ $(\geq 2,\ g$ Gerade der Ebene$)$

Projektive Ebene $\mathbf{P}^2(V^*(K)) = \mathbf{P}^2(K)$ über dem (Schief-)Körper K: Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \subset)$ mit $\mathbf{P} = \left\{[\vec{x}] \mid \vec{x} \in V \setminus \left\{\vec{0}\right\}\right\}$ und $\mathbf{G} = \{U \mid U$ zweidimensionaler Untervektorraum von V$\}$

Desargues-Ebene: Projektive Ebene, in der der Satz von Desargues gilt

Satz von Desargues: Seien A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3 nicht kollineare Punkte mit der Eigenschaft, dass sich die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3, B_3 in einem von A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ verschiedenen Punkt Z schneiden. Dann liegen die Punkte $P_{12} = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $P_{23} := A_2A_3 \cap B_2B_3$ und $P_{31} := A_3A_1 \cap B_3B_1$ auf einer Geraden.

- Satz: Jede projektive Ebene $\mathbf{P}^2(K)$ ist eine Desargues-Ebene

Pappus-Ebene: Projektive Ebene, in der der Satz von Pappus gilt

Satz von Pappus: Sind a, b verschiedene Geraden mit dem Schnittpunkt Z und $A_1, A_2, A_3 \in a \backslash \{Z\}$, $B_1 B_2 B_3 \in B \backslash \{Z\}$ paarweise verschiedene Punkte, so liegen die Punkte $Q_{12} := A_1B_2 \cap B_1A_2$, $Q_{23} := A_2B_3 \cap B_2A_3$ und $Q_{31} := A_3B_1 \cap B_3A_1$ auf einer Geraden.

- Satz: eine projektive Ebene $\mathbf{P}^2(K)$ ist eine Pappus-Ebene genau dann, wenn K ein Körper ist.