Lineare Algebra I - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2004/05, Dr. Drumm

$f : A \to B$ **injektiv**

- $\Leftrightarrow\ \forall\, x_1, x_2 \in A$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\Leftrightarrow\ \forall\, x_1, x_2 \in A$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $\Leftrightarrow$ Kern $f = \{0\}$

$f : A \to B$ **surjektiv**

- $\Leftrightarrow B = f(A)$
- $\Leftrightarrow\ \forall\, y \in B$ gilt: $\exists\, x \in A : f(x) = y$

$f : A \to B$ **bijektiv**: f ist injektiv und surjektiv, f^{-1} existiert

Die **Komposition** zweier Abbildungen ist assoziativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Eine Menge A mit Verknüpfung $\circ$ heißt...

- **Magma**: A ist abgeschlossen bzgl. $\circ$, d.h. $\forall\, x, y \in A : x \circ y \in A$
- **Halbgruppe**: zusätzlich ist $\circ$ assoziativ, d.h. $\forall\, x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- **Monoid**: zusätzlich gibt es ein neutrales Element $e \in A :\ \forall\, x \in A : x \circ e = x$ und $e \circ x = x$
- **Gruppe**: zusätzlich gibt es für jedes Element $x \in A$ ein inverses Element $x^{-1} \in A : x \circ x^{-1} = e$ und $x^{-1} \circ x = e$
- **kommutativ bzw. abelsch**: zusätzlich gilt $\forall\, x, y \in A : x \circ y = y \circ x$

Eine Relation $\sim$ auf A heißt **Äquivalenzrelation**, falls gilt:

1. Reflexivität: $\forall\, x \in A : x \sim x$
2. Symmetrie: $\forall\, x, y \in A : x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. Transitivität: $\forall\, x, y, z \in A : x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Äquivalenzklasse: $[x]_\sim := \{y \in A | y \sim x\}$

- Die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen aus A heißt Faktormenge oder Quotientenmenge $A/\sim$

Symmetrische Gruppe S_B: Gruppe der bijektiven Abbildungen $f : B \to B$

- Ist B endlich, $|B| = m$ heißen die Elemente von S_B Permutationen. Notation: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix}$
- Permutation, die zwei Elemten i, j $(i < j)$ vertauscht und die anderen Elemente festhält: Transposition $\tau^{(i,j)}$

Untergruppenkriterium: Eine Teilmenge B einer Gruppe $(A, \circ)$ ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt:

1. $B \neq \emptyset$
2. $\forall\, a, b \in B : a \circ b^{-1} \in B$

Gruppenhomomorphismus: Es seien $(A, \circ)$ und $(A', *)$ Gruppen. $f : A \to A'$ heißt Gruppenhomomorphismus, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$

Ring / **Ring mit 1** / **Körper** heißt eine Menge A mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, falls gilt:

1. $(A, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. (Ring) $(A, \cdot)$ ist eine Halbgruppe
   (Ring mit 1) $(A, \cdot)$ ist ein Monoid
   (Körper) $(A \backslash \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe
3. Für alle $x, y, z \in A$ gelten die Distributivgesetze: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Nullteiler: $a \neq 0$ eines Rings, wenn es ein $b \neq 0$ gibt: $a \cdot b = 0$.

Charakteristik eines Körpers: kleinste Zahl $p \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{p-mal} = 0$

- Existiert ein solches p nicht, ordnet man dem Körper die Charakteristik 0 zu.

Körperhomomorphismus: Es seien $(A, +, \cdot)$ und $(A', \oplus, \odot)$ Körper. Eine Abbildung $f : A \rightarrow A'$ heißt Körperhomomorphismus, wenn für alle $x, y \in A$ gilt:

1. $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$
2. $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$

Restklassen: $a \sim b \Leftrightarrow m$ teilt $b - a$

- Schreibweise: $a \equiv b \mod m$
- a und b sind genau dann äquivalent, wenn sie bei Division durch m denselben Rest besitzen.
- $\mathbb{Z}_m$ ist ein kommutativer Ring mit 1 und genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.
- $[x]_\sim + [y]_\sim := [x + y]_\sim$ und $[x]_\sim \cdot [y]_\sim := [x \cdot y]_\sim$

Teilerfremdheit: Die Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sind genau dann teilerfremd, wenn es Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ax + by = 1$.

Euklidischer Algorithmus, um den ggT(a,b), $a, b \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen.

1. Teile a durch b: $a = k \cdot b + r$
2. Teile b durch r: $b = k_1 \cdot r + r_1$
3. Teile r durch r_1: $r = k_2 \cdot r_1 + r_2$

usw. bis Teile r_{j-1} durch r_j: $r_{j-1} = k_{j+1} \cdot r_j$. $ggT(a, b) = r_j$.

Kronecker-Symbol: $\delta_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{array} \right\}$

Matrizen

- Addition, Multiplikation mit einem Element $c \in \mathbb{K}$: klar
- Matrizenmultiplikation einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit einer Matrix $B \in K^{n \times k}$:
  $AB = C \in K^{m \times k}$ mit $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$
- $(A + B) + C = A + (B + C),\ A(BC) = (AB)C,\ (ab)A = a(bA),\ c(AB) = (cA)B = A(cB)$
- $A(B + C) = AB + AC,\ (A + B)C = AC + BC,\ (a + b)A = aA + bA,\ c(A + B) = cA + cB$
- A regulär $\Leftrightarrow$ Inverses A^{-1} bzgl. der Multiplikation existiert.
- $(A^T)^T = A,\ (A + B)^T = A^T + B^T,\ (AB)^T = B^T A^T,\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $A, \tilde{A}$ ähnlich $\Leftrightarrow\ \exists\ S : \tilde{A} = S^{-1} AS$
- $A, \tilde{A}$ äquivalent $\Leftrightarrow\ \exists\ S, T : \tilde{A} = T^{-1} AS$

Polynom: $p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

Vektorraum über dem Körper K heißt eine Menge V mit einer inneren Verknüpfung $+ : V \times V \rightarrow V$ und einer äußeren Verknüpfung $\cdot : K \times V \rightarrow V$ mit:

1. $(V, +)$ ist eine abelsche Grupppe
2. $a(x + y) = ax + ay\ \forall\ a \in K,\ x, y, \in V$
3. $(a + b)x = ax + bx\ \forall\ a, b \in K,\ x \in V$
4. $a(bx) = (ab)x\ \forall\ a, b \in K,\ x \in V$
5. $1 \cdot x = x\ \forall\ x \in V$

Untervektorraum-Kriterium: $U \subseteq V$ Untervektorraum $:\Leftrightarrow$

1. $U \neq \emptyset$
2. $\forall\ a \in \mathbb{K}, x, y \in U : a \cdot x \in U$ und $x + y \in U$

Lineare Hülle von $A \subseteq V$: Menge aller Vektoren eines Vektorraums V, die sich als Linearkombination von Vektoren aus A darstellen lässt. Schreibweise: $[A]$

$x_1, ..., x_k$ **linear unabhängig**: $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$

Erzeugendensystem: Menge $A \subset U$ mit $[A] = U$ wobei U Untervektorraum eines Vektorraums V

Basis: linear unabhängiges Erzeugendensystem

Rang einer Matrix:

- Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist genau dann regulär, wenn $Rg\ A = n$ gilt.
- Das LGS $Ax = b$ mit $b \in K^m$ ist genau dann lösbar, wenn gilt: $Rg\ A = Rg\ (A|b)$
- Der Lösungsraum des homogenen LGS $Ax = 0$ besitzt die Dimension $n - Rg\ A$

Direkte Summe: Der Schnitt jeweils zweier Untervektorräume besteht nur aus dem Nullvektor

- die Summe von Untervektorräumen $U = U_1 + ... + U_k$ ist genau dann direkt, wenn jeder Vektor $x \in U$ eine <u>eindeutige</u> Darstellung $x = u_1 + ... + u_k$ mit $u_i \in U_i$ für $i = 1..k$ besitzt.

Dimensionssatz für Untervektorräume: $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$

- Für direkte Summen gilt: $\dim U + \dim W = \dim(U \oplus W)$, da $\dim(U \cap W)$ i.d. Fall 0 ist.

W Komplementärraum zu U (U,W Untervektorräume von V): $V = U \oplus W$

Faktorräume:

- Es seien V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Dann ist durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in U$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert.
- Für die Faktormenge schreibt man V/U. Sie besteht aus den Äquivalenzklassen $[x]_\sim = x + U = \{x + u | u \in U\}$
- $[x]_\sim + [y]_\sim := [x + y]_\sim$ bzw. $(x + U) + (y + U) = (x + y) + U$
  $a \cdot [x]_\sim := [ax]_\sim$ bzw. $a \cdot (x + U) = ax + U$
- $\dim V = \dim U + \dim(V/U)$
- Sei U ein Untervektorraum von V mit Basis B. Ist $B \cup B'$ eine Basis von V und $B \cap B' = \emptyset$, dann ist $\{x + U | x \in B'\}$ eine Basis von V/U.

Affiner Unterraum: $L = x + U$ mit U Untervektorraum von V, $x \in V$

- $\dim L := \dim U$
- Die affinen Unterräume L_1 und L_2 heißen parallel, falls gilt: $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Lineare Abbildung:

- eine Abbildung $\Phi : V \to W$ heißt linear, wenn gilt: $\Phi(ax + by) = a \cdot \Phi(x) + b \cdot \Phi(y)\ \forall\ x, y \in V, a, b \in K$
- Bild $\Phi := \{\Phi(x) | x \in V\}$ und Kern $\Phi := \{x \in V | \Phi(x) = 0\}$
- $\dim V = \dim \text{Kern}\ \Phi + \dim \text{Bild}\ \Phi$
- Hom $(V, W) := \{\Phi : V \to W | \Phi\ linear\}$ ist ein K-Vektorraum.
- $\dim \text{Hom}\ (V, W) = \dim V \cdot \dim W$
- Abbildungsmatrix: Koordinaten von $\Phi(b_j)$ in die j-te Spalte schreiben
- Für lineare Abbildungen und deren Abbildungsmatrizen gilt: $A_{\tilde{\Phi} \circ \Phi} = A_{\tilde{\Phi}} \cdot A_\Phi$, $A_{\Phi^{-1}} = A_\Phi^{-1}$

Abbildungsmatrizen bei verschiedenen Basen:

- $B, \tilde{B}$ seien Basen eines Vektorraums V
- $C, \tilde{C}$ seien Basen eines Vektorraums W
- S sei die Übergangsmatrix für den Basiswechsel $\tilde{B} \leftarrow B$ und T die Übergangsmatrix für den Basiswechsel $\tilde{C} \leftarrow C$
- A_Φ sei die Abbildungsmatrix von $\Phi : V \to W$ bzgl. der Basen B und C.

$\Rightarrow \tilde{A}_\Phi = T^{-1} A_\Phi S$ ist die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$.

Äquivalenz von Matrizen: Zwei Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Rang haben.

Determinante:

- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ A regulär $\Leftrightarrow Rg\ A = n \Leftrightarrow Ax = 0$ unlösbar
- $\det A = 0 \Leftrightarrow$ Zeilen und Spalten von A sind linear abhängig
- $\det \Phi := \det A_\Phi, \det A^T = \det A, \det(AB) = (\det A)(\det B)$