

# Lineare Algebra II - Formelsammlung

von Julian Merkert, Sommersemester 2005, Dr. Drumm

$V$  sei ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $\Phi$  eine lineare Abbildung bzw. Endomorphismus von  $V$ .

**Eigenwert  $c$  von  $\Phi$ :**  $\exists v \neq 0 : \Phi(v) = cv$

**Eigenraum zum EW  $c$ :**  $E_c = \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})$

**Charakteristisches Polynom:**  $p = \det(A - XE_n)$

- Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$\Phi$  **diagonalisierbar**

- $\Leftrightarrow$  Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von  $\Phi$   
( $\Rightarrow$  Die Abbildungsmatrix hat Diagonalgestalt, auf der Diagonalen stehen die Eigenwerte von  $\Phi$ )
- $\Leftrightarrow V$  ist direkte Summe der Eigenräume von  $\Phi$
- $\Leftrightarrow$  Die Summe der Dimensionen der Eigenräume von  $\Phi$  ergibt  $n$

**Cayley-Hamilton:** Für das charakteristische Polynom  $p$  von  $\Phi$  gilt:  $p(\Phi) = 0$

**Minimalpolynom:** Normiertes Polynom  $m$  vom kleinsten Grad, das  $m(\Phi) = 0$  erfüllt.

**Hauptraum zum Eigenwert  $c$ :**  $H_c = \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^r$

- $c$  sei  $r$ -facher Eigenwert bzw.  $r$ -fache Nullstelle des char. Polynoms von  $\Phi$  sowie  $s$ -fache Nullstelle des Minimalpolynoms
- $s$  heißt der Index von  $H_c$
- $s$  ist außerdem die kleinste Zahl, für die gilt:  $\text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^s = \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^{s+1}$

**Jordan'sche Normalform  $\tilde{A}$ :**

- Char. Polynom zerfällt in Linearfaktoren  $\Rightarrow \tilde{A}$  existiert
- $c_i$   $r$ -facher Eigenwert  $\Rightarrow$  Jordan-Block  $A_{c_i}$  der Länge  $r$
- In  $A_{c_i}$  treten  $\dim E_{c_i}$  Jordan-Kästchen auf ( $E_{c_i}$  = Eigenraum zu  $c_i$ )
- Es existiert mindestens ein Kästchen der Maximallänge  $s_i$ .
- $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  sind genau dann ähnlich, wenn sie die selbe Jordan'sche Normalform besitzen.

**Jordan-Basis:** Für jeden Eigenwert  $c$  folgende Schritte ausführen:

1. Alle Räume  $\text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^x, x = 1..r$  bis zum Hauptraum  $H_c$  bestimmen.
2. Wähle  $x_1 \in \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^r \setminus \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^{r-1}$
3. Berechne  $x_2 := (\Phi - c \cdot \text{id}) \cdot x_1 \in \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^{r-1} \setminus \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^{r-2}$   
 $x_3 := (\Phi - c \cdot \text{id}) \cdot x_2 = (\Phi - c \cdot \text{id})^2 \cdot x_1 \in \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^{r-2} \setminus \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^{r-3}$   
 $\vdots$   
bis  $x_i \in \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id}) = E_c$
4. Falls es noch weitere Vektoren außer  $x_1$  gibt, die in  $U_r \setminus U_{r-1}$  (oder untergeordneten Räumen) liegen, nochmal zurück zu 2. springen. Am Schluss erfüllt  $S := (x_1 | x_2 | \dots)$  die Bedingung  $\tilde{A} = S^{-1}AS$ . Die erzeugenden Vektoren eines Jordan-Kästchens der Länge  $L$  starten bei Punkt (2.) mit einem Vektor aus  $\text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^L \setminus \text{Kern}(\Phi - c \cdot \text{id})^{L-1}$

*Euklidischer Vektorraum*  
(=Vektorraum mit Skalarprodukt)

**Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \forall x, y, z \in V, a, b \in \mathbb{R} :$

1. Symmetrie:  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. Bilinearität:  $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$
3. Positive Definitheit:  $\langle x, x \rangle > 0 \forall x \neq 0$

**Norm:**  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

**Satz von Pythagoras:**  $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

**Parallelogrammidentität:**  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

- Eine Norm wird genau dann von einem Skalarprodukt erzeugt, wenn die Parallelogrammidentität erfüllt ist.

**Winkel:**  $\cos \omega = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **symmetrisch:**  $A^T = A$

- $\Rightarrow$  A diagonalisierbar
- $\Rightarrow$  Eigenvektoren von A zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal (bzgl. Standard-SKP)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , A symmetrisch, heißt **positiv definit**

- $\Leftrightarrow \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\hat{x} \neq 0 : \hat{x}^T A \hat{x} > 0$
- $\Leftrightarrow$  alle Eigenwerte von A sind positiv
- $\Leftrightarrow$  alle Hauptunterdeterminanten von A sind positiv

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist genau dann ein **Skalarprodukt**, wenn eine symmetrische, positiv definite Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert mit  $\langle x, y \rangle = \hat{x}^T A \hat{y} \forall x, y \in V$

**Orthogonalität:**  $\langle x, y \rangle = 0$

**Orthogonales Komplement:**  $W^\perp := \{x \in V \mid \forall y \in A : \langle x, y \rangle = 0\}$

- $U \subseteq V$  endlicher Untervektorraum  $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp, (U^\perp)^\perp = U$

**Orthonormalbasis (ONB):**

- $B \subseteq V$  ONB  $\Leftrightarrow$ 
  1.  $0 \notin B$
  2.  $x \perp y \forall x, y \in B$  mit  $x \neq y$  (Orthogonalsystem)
  3.  $\|x\| = 1 \forall x \in B$  (Orthonormalsystem)
  4. B Basis von V (ONB)
- $B = (x_1, \dots, x_n)$  ONB  $\Leftrightarrow \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$
- Jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum V besitzt eine ONB.

*Unitärer Vektorraum*  
(=Vektorraum mit hermitescher Form)

**Hermitesche Form**  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \forall x, y, z \in V, a, b \in \mathbb{C} :$

1. Hermite-Eigenschaft:  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. Bilinearität im 1. Argument:  
 $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$
3. Positive Definitheit:  $\langle x, x \rangle > 0 \forall x \neq 0$
4.  $\langle x, ay + bz \rangle = \bar{a} \langle x, y \rangle + \bar{b} \langle x, z \rangle$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  **hermitesch:**  $\bar{A}^T = A$

- $\Rightarrow$  A diagonalisierbar und alle Eigenwerte von A reell
- $\Rightarrow$  Eigenvektoren von A zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal (bzgl. Standard-SKP)

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , A hermitesch, heißt **positiv definit**

- $\Leftrightarrow \forall \hat{x} \in \mathbb{C}^n$  mit  $\hat{x} \neq 0 : \hat{x}^T A \bar{\hat{x}} > 0$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist genau dann ein **Skalarprodukt**, wenn eine hermitesche, positiv definite Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existiert mit  $\langle x, y \rangle = \hat{x}^T A \bar{\hat{y}} \forall x, y \in V$

- Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt:

1. Bestimme eine Basis  $B' = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$
2. Basisvektor  $e_1$ :  $y_1 := x_1 \Rightarrow e_1 := \frac{1}{\|y_1\|} y_1$
3. Basisvektor  $e_2$ :  $y_2 := x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1 \Rightarrow e_2 := \frac{1}{\|y_2\|} y_2$
4. Basisvektor  $e_3$ :  $y_3 := x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2 \Rightarrow e_3 := \frac{1}{\|y_3\|} y_3$
- $\vdots$
5.  $B = (e_1, \dots, e_n)$  ist dann eine ONB von  $V$ .

- Ist  $B = (e_1, \dots, e_n)$  ONB eines euklidischen Vektorraums  $V$ , dann gilt  $\forall x, y \in V$ :

- $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
- $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$
- $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$

### $\pi$ Orthogonalprojektion

- $\Leftrightarrow \pi$  Projektion ( $\pi^2 = \pi$ ) und  $\forall x \in V : (\pi(x) - x) \perp \pi(x)$
- $\Leftrightarrow \pi$  Projektion ( $\pi^2 = \pi$ ) und Kern  $\pi \perp$  Bild  $\pi$
- $\Leftrightarrow \pi$  Projektion ( $\pi^2 = \pi$ ) und  $\|\pi(x)\| \leq \|x\| \forall x \in V$
- Auf dem Untervektorraum  $U \subseteq V$  existiert genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn  $V = U \oplus U^\perp$  gilt.
- Auf einem endlichdimensionalen Untervektorraum  $U$  mit ONB  $B = (u_1, \dots, u_k)$  existiert die Orthogonalprojektion  $\pi$  und es gilt:  $\pi(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i$

**Abstand** von  $x \in V$  zu  $U \subseteq V$  Untervektorraum:  $d(x, U) = \|x - \pi(x)\|$

**Abstand zweier affiner Unterräume**  $L_1 = x_1 + U_1, L_2 = x_2 + U_2$  mit  $\{b_1, \dots, b_k\}$  Basis von  $U_1$  und  $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_l\}$  Basis von  $U_2$ :

1. Fußpunkte  $y_1 \in L_1, y_2 \in L_2 \Rightarrow y_1 := x_1 + \sum_{i=1}^k a_i b_i, y_2 := x_2 + \sum_{i=1}^l \tilde{a}_i \tilde{b}_i$
2.  $y_1 - y_2$  berechnen
3. Koeffizienten  $a_1, \dots, a_k, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_l$  aus folgenden Gleichungssystemen bestimmen:  
 $\langle y_1 - y_2, b_i \rangle = 0, i = 1..k$  und  $\langle y_1 - y_2, \tilde{b}_j \rangle = 0, j = 1..l$
4. Abstand von  $L_1$  und  $L_2$ :  $d(L_1, L_2) = \|y_1 - y_2\|$

**Hesse'sche Normalenform:**  $L : \langle n, x \rangle - b = 0$  mit  $n \in U^\perp, \|n\| = 1, b \in \mathbb{R}$

- Abstand eines Punktes  $y \in \mathbb{R}^n$ :  $d(y, L) = |\langle n, y \rangle - b|$

**Adjungierte Abbildung  $\Phi^*$ :**

$$\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Phi^*(y) \rangle \quad \forall x \in V, y \in W$$

- $V$  endlichdimensional  $\Rightarrow \Phi^*$  existiert und ist eindeutig
- Ist  $A$  die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich zweier ONBs, so ist  $A^T$  die Abbildungsmatrix von  $\Phi^*$
- $(\Phi^*)^* = \Phi$
- $(a\Phi)^* = a\Phi^* \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $(\Phi + \Psi)^* = \Phi^* + \Psi^*$
- $(\Theta \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Theta^*$

 **$\Phi$  selbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = \Phi$
- $\Leftrightarrow$  Es existiert eine ONB von  $V$  aus Eigenvektoren von  $\Phi$
- $\Leftrightarrow A$  symmetrisch ( $A^T = A$ ) bezüglich einer ONB

 **$\Phi$  antiselbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = -\Phi$
- $\Leftrightarrow A$  antisymmetrisch ( $A^T = -A$ ) bezüglich einer ONB

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal: } AA^T = A^T A = E$$

$$\Phi \text{ Isometrie: } \forall x, y \in V : \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- $\Phi^* = \Phi^{-1}$
- $\Leftrightarrow \forall x \in V : \|\Phi(x)\| = \|x\|$
- $\Leftrightarrow B = (x_1, \dots, x_n)$  ONB von  $V$  und  $\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$  ebenfalls eine ONB von  $V$  bilden
- $\Leftrightarrow \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi = id$
- $\Leftrightarrow$  Abbildungsmatrix  $A$  von  $\Phi$  bezüglich zweier ONBs orthogonal, also  $AA^T = A^T A = E$

**Adjungierte Abbildung  $\Phi^*$ :**

$$\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Phi^*(y) \rangle \quad \forall x \in V, y \in W$$

- $V$  endlichdimensional  $\Rightarrow \Phi^*$  existiert und ist eindeutig
- Ist  $A$  die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bezüglich zweier ONBs, so ist  $\overline{A}^T$  die Abbildungsmatrix von  $\Phi^*$
- $(\Phi^*)^* = \Phi$
- $(a\Phi)^* = \overline{a}\Phi^* \quad \forall a \in \mathbb{C}$
- $(\Phi + \Psi)^* = \Phi^* + \Psi^*$
- $(\Theta \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Theta^*$

 **$\Phi$  selbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = \Phi$
- $\Leftrightarrow$  Es existiert eine ONB von  $V$  aus Eigenvektoren von  $\Phi$ , und alle Eigenwerte von  $\Phi$  sind reell
- $\Leftrightarrow A$  hermitesch ( $\overline{A}^T = A$ ) bezüglich einer ONB

 **$\Phi$  antiselbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = -\Phi$
- $\Leftrightarrow A$  schieferhermitesch ( $\overline{A}^T = -A$ ) bezüglich einer ONB

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ unitär: } A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = E$$

$$\Phi \text{ Isometrie: } \forall x, y \in V : \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- $\Phi^* = \Phi^{-1}$
- $\Leftrightarrow \forall x \in V : \|\Phi(x)\| = \|x\|$
- $\Leftrightarrow B = (x_1, \dots, x_n)$  ONB von  $V$  und  $\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$  ebenfalls eine ONB von  $V$  bilden
- $\Leftrightarrow \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi = id$
- $\Leftrightarrow$  Abbildungsmatrix  $A$  von  $\Phi$  bezüglich zweier ONBs unitär, also  $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = E$

**Normalform einer Isometrie bestimmen:**

1. Überprüfen, ob Basis von  $V$  ONB ist bzw. ob  $A_\Phi$  orthogonal ist
2.  $A + A^T$  berechnen
3. Normalform konstruieren:

- $+2$  p-facher Eigenwert von  $A + A^T \Rightarrow +1$  p-facher Eigenwert von  $\Phi$
- $-2$  q-facher Eigenwert von  $A + A^T \Rightarrow -1$  q-facher Eigenwert von  $\Phi$

- $|c| \neq 2$  l-facher Eigenwert von  $A + A^T \Rightarrow \frac{l}{2}$  Drehkästchen der Form  $\begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$

$$\text{mit } \cos \omega = \frac{c}{2}, \sin \omega = \sqrt{1 - (\cos \omega)^2}$$

### Orthogonale Matrix $S$ mit $\tilde{A} = S^T A S$ bestimmen:

1. Eigenraum  $E_1$  bzw.  $E_{-1}$  zum Eigenwert 1 bzw. -1 finden ( $\rightarrow$  Drehachse)
2. Drehebene  $E_1^\perp$  bzw.  $E_{-1}^\perp$  bestimmen (ausprobieren!)
3. Vektoren aus  $E_1$  und  $E_1^\perp$  bzw.  $E_{-1}$  und  $E_{-1}^\perp$  mit Gram-Schmidt orthogonalisieren, nebeneinander geschrieben ergeben sie die Matrix  $S$ .

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ normal: } A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$$

$$\Phi \text{ normal: } \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$$

- $\Leftrightarrow$  Abbildungsmatrix  $A$  von  $\Phi$  ist bezüglich einer ONB normal
- $\Leftrightarrow \Phi^*$  existiert und  $\|\Phi(x)\| = \|\Phi^*(x)\|$
- $\Leftrightarrow$  es existiert eine ONB von  $V$  aus Eigenvektoren von  $\Phi$  (nur für  $V$  unitär!)
- $\Rightarrow$  Kern  $\Phi =$  Kern  $\Phi^*$

### Für euklidische und unitäre Vektorräume gilt:

- $x$  Eigenvektor von  $\Phi$  zum Eigenwert  $c \Leftrightarrow x$  Eigenvektor von  $\Phi^*$  zum Eigenwert  $\bar{c}$
- Eigenvektoren von  $\Phi$  zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

$\mathbb{A}$  **affiner Raum** (nichtleere Menge, deren Elemente Punkte heißen) bezüglich Vektorraum  $V$ , falls gilt:

1. Zu jedem  $P \in \mathbb{A}$  und jedem  $x \in V$  gibt es genau ein  $Q \in \mathbb{A}$  mit  $\overrightarrow{PQ} = x$
2. Für alle  $P, Q, R \in \mathbb{A}$  gilt:  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$L \subseteq \mathbb{A}$  **Affiner Unterraum**  $\Leftrightarrow \exists P \in L : U_L := \{\overrightarrow{PQ} | Q \in L\}$  ist Untervektorraum von  $V$ .

- $U_L$  ist unabhängig von der Wahl des Punktes  $P \in L$  und wird Richtungsraum genannt.
- Affine Unterräume  $L_1$  und  $L_2$  mit den Richtungsräumen  $U_1$  und  $U_2$  heißen parallel  $\Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2$  oder  $U_2 \subseteq U_1$ .
- Parameterdarstellung 1. Art:  $L = \left\{ X \in \mathbb{A} | \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{P_0P_i}, a_i \in \mathbb{K} \right\}$
- Parameterdarstellung 2. Art:  $L = \left\{ X \in \mathbb{A} | \overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^k a_i \overrightarrow{OP_i}, a_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^k a_i = 1 \right\}$

$P_1, \dots, P_k$  **affin unabhängig**  $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$  linear unabhängig.

$P \in \mathbb{A}$  **Affinkombination** der Punkte  $P_0, \dots, P_k$  :

$\Leftrightarrow \exists O \in \mathbb{A}$  und  $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  mit  $\sum_{i=0}^k a_i = 1$ , so dass  $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^k a_i \overrightarrow{OP_i}$  gilt.

$\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  **affine Abbildung** ( $O, O'$  Ursprünge von  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ )

- $\Leftrightarrow$  es existiert lineare Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  mit  $\Phi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$
- $\Rightarrow \exists \Phi : V \rightarrow W, w \in W : \overrightarrow{O'\varphi(X)} = \Phi(\overrightarrow{OX}) + w \forall X \in \mathbb{A}$

**Translation:**  $\exists v \in V : \forall P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{P\varphi(P)} = v$

**Streckung** mit Zentrum  $Z \in \mathbb{A}$  und Streckfaktor  $c \in \mathbb{K} : \forall P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{Z\varphi(P)} = c\overrightarrow{ZP}$

**Fixpunkt  $P$ :**  $\varphi(P) = P$

**Fixraum  $L$ :**  $\varphi(L) = L$

- $\Leftrightarrow \Phi(U) = U$  und  $\exists P \in L$  mit  $\varphi(P) \in L$

**Quadrik:** Punktmenge  $Q = \left\{ x \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{OX} = x, \beta(x, x) + 2\Phi(x) + c = 0 \right\}$  eines  $n$ -dimensionalen reellen affinen Raums  $\mathbb{A}$  mit symmetrischer Bilinearform  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und Linearform  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$

**Affine Normalformen:**

1.  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0$  mit  $p \geq r - p$
2.  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 1$
3.  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 2x_n$  mit  $r < n, p \geq r - p$

**Abbildungsmatrix der symmetrischen Bilinearform** bestimmen, die eine Quadrik  $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \dots + b_1x_1x_2 + b_2x_1x_3 + b_3x_2x_3\dots$  als quadratische Form hat:

1. Die Faktoren  $a_i$  vor den Quadraten kommen auf die Diagonale
2. Der Wert  $\frac{b_i}{2}$  kommt an die Stelle der beiden zugehörigen Indices von  $x$ , für  $x_1x_2$  also an (1,2) und (2,1)
3. Im Dreidimensionalen sieht die Matrix also folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \frac{b_1}{2} & \frac{b_2}{2} \\ \frac{b_1}{2} & a_2 & \frac{b_3}{2} \\ \frac{b_2}{2} & \frac{b_3}{2} & a_3 \end{pmatrix}$$