# Lineare Algebra II - Formelsammlung

*von Julian Merkert, Sommersemester 2005, Dr. Drumm*

V sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\Phi$ eine lineare Abbildung bzw. Endomorphismus von V.

**Eigenwert c von** $\Phi$: $\exists\, v \neq 0 : \Phi(v) = cv$

**Eigenraum zum EW c**: $E_c = \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)$

**Charakteristisches Polynom**: $p = \det(A - XE_n)$

- Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$\Phi$ **diagonalisierbar**

- $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von $\Phi$
  ($\Rightarrow$ Die Abbildungsmatrix hat Diagonalgestalt, auf der Diagonalen stehen die Eigenwerte von $\Phi$)
- $\Leftrightarrow$ V ist direkte Summe der Eigenräume von $\Phi$
- $\Leftrightarrow$ Die Summe der Dimensionen der Eigenräume von $\Phi$ ergibt n

**Cayley-Hamilton**: Für das charakteristische Polynom p von $\Phi$ gilt: $p(\Phi) = 0$

**Minimalpolynom**: Normiertes Polynom m vom kleinsten Grad, das $m(\Phi) = 0$ erfüllt.

**Hauptraum zum Eigenwert c**: $H_c = \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^r$

- c sei r-facher Eigenwert bzw. r-fache Nullstelle des char. Polynoms von $\Phi$ sowie s-fache Nullstelle des Minimalpolynoms
- s heißt der Index von $H_c$
- s ist außerdem die kleinste Zahl, für die gilt: $\text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^s = \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^{s+1}$

**Jordan'sche Normalform** $\tilde{A}$:

- Char. Polynom zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow \tilde{A}$ existiert
- $c_i$ r-facher Eigenwert $\Rightarrow$ Jordan-Block $A_{c_i}$ der Länge r
- In $A_{c_i}$ treten $\dim E_{c_i}$ Jordan-Kästchen auf ($E_{c_i}$=Eigenraum zu $c_i$)
- Es existiert mindestens ein Kästchen der Maximallänge $s_i$.
- $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind genau dann ähnlich, wenn sie die selbe Jordan'sche Normalform besitzen.

**Jordan-Basis**: Für jeden Eigenwert c folgende Schritte ausführen:

1. Alle Räume $\text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^x, x = 1..r$ bis zum Hauptraum $H_c$ bestimmen.
2. Wähle $x_1 \in \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^r \backslash \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^{r-1}$
3. Berechne $x_2 := (\Phi - c \cdot id) \cdot x_1 \ \in \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^{r-1} \backslash \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^{r-2}$
   $x_3 := (\Phi - c \cdot id) \cdot x_2 = (\Phi - c \cdot id)^2 \cdot x_1 \ \in \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^{r-2} \backslash \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^{r-3}$
   $\vdots$
   bis $x_i \in \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id) = E_c$
4. Falls es noch weitere Vektoren außer $x_1$ gibt, die in $U_r \backslash U_{r-1}$ (oder untergeordneten Räumen) liegen, nochmal zurück zu 2. springen. Am Schluss erfüllt $S := (x_1|x_2|...)$ die Bedingung $\tilde{A} = S^{-1}AS$. Die erzeugenden Vektoren eines Jordan-Kästchens der Länge L starten bei Punkt (2.) mit einem Vektor aus $\text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^L \backslash \text{Kern}\ (\Phi - c \cdot id)^{L-1}$

*Euklidischer Vektorraum*
(=Vektorraum mit Skalarprodukt)

**Skalarprodukt** $\langle \cdot,\cdot \rangle$: $\forall\ x,y,z \in V,\ a,b \in \mathbb{R}:$

1. Symmetrie: $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
2. Bilinearität: $\langle ax+by,z \rangle = a\langle x,z \rangle + b\langle y,z \rangle$
3. Positive Definitheit: $\langle x,x \rangle > 0\ \forall\ x \neq 0$

*Unitärer Vektorraum*
(=Vektorraum mit hermitescher Form)

**Hermitesche Form** $\langle \cdot,\cdot \rangle$: $\forall\ x,y,z \in V,\ a,b \in \mathbb{C}:$

1. Hermite-Eigenschaft: $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$
2. Bilinearität im 1. Argument:
   $\langle ax+by,z \rangle = a\langle x,z \rangle + b\langle y,z \rangle$
3. Positive Definitheit: $\langle x,x \rangle > 0\ \forall\ x \neq 0$
4. $\langle x,ay+bz \rangle = \overline{a}\langle x,y \rangle + \overline{b}\langle x,z \rangle$

**Norm**: $||x|| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$

**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**: $|\langle x,y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$

**Satz von Pythagoras**: $x \perp y \Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$

**Parallelogrammidentität**: $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$

- Eine Norm wird genau dann von einem Skalarprodukt erzeugt, wenn die Parallelogrammidentität erfüllt ist.

**Winkel**: $\cos\omega = \frac{\langle x,y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **symmetrisch**: $A^T = A$

- $\Rightarrow$ A diagonalisierbar
- $\Rightarrow$ Eigenvektoren von A zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal (bzgl. Standart-SKP)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A symmetrisch, heißt **positiv definit**

- $\Leftrightarrow\ \forall\ \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\hat{x} \neq 0 : \hat{x}^T A \hat{x} > 0$
- $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv
- $\Leftrightarrow$ alle Hauptunterdeterminanten von A sind positiv

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist genau dann ein **Skalarprodukt**, wenn eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $\langle x,y \rangle = \hat{x}^T A \hat{y}\ \forall\ x,y \in V$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch**: $\overline{A}^T = A$

- $\Rightarrow$ A diagonalisierbar und alle Eigenwerte von A reell
- $\Rightarrow$ Eigenvektoren von A zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal (bzgl. Standart-SKP)

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A hermitesch, heißt **positiv definit**

- $\Leftrightarrow\ \forall\ \hat{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $\hat{x} \neq 0 : \hat{x}^T A \overline{\hat{x}} > 0$

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist genau dann ein **Skalarprodukt**, wenn eine hermitesche, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert mit $\langle x,y \rangle = \hat{x}^T A \overline{\hat{y}}\ \forall\ x,y \in V$

**Orthogonalität**: $\langle x,y \rangle = 0$

**Orthogonales Komplement**: $W^\perp := \{x \in V |\ \forall\ y \in A : \langle x,y \rangle = 0\}$

- $U \subseteq V$ endlicher Untervektorraum $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp,\ (U^\perp)^\perp = U$

**Orthonormalbasis (ONB)**:

- $B \subseteq V$ ONB $\Leftrightarrow$
  1. $0 \notin B$
  2. $x \perp y\ \forall\ x,y \in B$ mit $x \neq y$ (Orthogonalsystem)
  3. $||x|| = 1\ \forall\ x \in B$ (Orthonormalsystem)
  4. B Basis von V (ONB)
- $B = (x_1,...,x_n)$ ONB $\Leftrightarrow \langle x_i,x_j \rangle = \delta_{ij}$
- Jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum V besitzt eine ONB.

- Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt:
  1. Bestimme eine Basis $B' = (x_1, ..., x_n)$ von V
  2. Basisvektor $e_1$: $y_1 := x_1 \;\Rightarrow\; e_1 := \frac{1}{||y_1||} y_1$
  3. Basisvektor $e_2$: $y_2 := x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1 \;\Rightarrow\; e_2 := \frac{1}{||y_2||} y_2$
  4. Basisvektor $e_3$: $y_3 := x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2 \;\Rightarrow\; e_3 := \frac{1}{||y_3||} y_3$

     $\vdots$
  5. $B = (e_1, ..., e_n)$ ist dann eine ONB von V.
- Ist $B = (e_1, ..., e_n)$ ONB eines euklidischen Vektorraums V, dann gilt $\forall\, x, y \in V$:
  - $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
  - $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$
  - $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} | \langle x, e_i \rangle |^2$

$\pi$ **Orthogonalprojektion**

- $\Leftrightarrow \pi$ Projektion $(\pi^2 = \pi)$ und $\forall\, x \in V : (\pi(x) - x) \perp \pi(x)$
- $\Leftrightarrow \pi$ Projektion $(\pi^2 = \pi)$ und Kern $\pi \perp$ Bild $\pi$
- $\Leftrightarrow \pi$ Projektion $(\pi^2 = \pi)$ und $||\pi(x)|| \leq ||x|| \;\forall\, x \in V$
- Auf dem Untervektorraum $U \subseteq V$ existiert genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $V = U \oplus U^{\perp}$ gilt.
- Auf einem endlichdimensionalem Untervektorraum U mit ONB $B = (u_1, ..., u_k)$ existiert die Orthogonalprojektion $\pi$ und es gilt: $\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$

**Abstand** von $x \in V$ zu $U \subseteq V$ Untervektorraum: $d(x, U) = ||x - \pi(x)||$

**Abstand zweier affiner Unterräume** $L_1 = x_1 + U_1, L_2 = x_2 + U_2$ mit $\{b_1, ..., b_k\}$ Basis von $U_1$ und $\left\{\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_l\right\}$ Basis von $U_2$:

1. Fußpunkte $y_1 \in L_1, y_2 \in L_2 \Rightarrow y_1 := x_1 + \sum_{i=1}^{k} a_i b_i, y_2 := x_2 + \sum_{i=1}^{l} \tilde{a}_i \tilde{b}_i$
2. $y_1 - y_2$ berechnen
3. Koeffizienten $a_1, ..., a_k, \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_l$ aus folgenden Gleichungssystemen bestimmen:

   $\langle y_1 - y_2, b_i \rangle = 0,\; i = 1..k$ und $\left\langle y_1 - y_2, \tilde{b}_j \right\rangle = 0,\; j = 1..l$
4. Abstand von $L_1$ und $L_2$: $d(L_1, L_2) = ||y_1 - y_2||$

**Hesse'sche Normalenform**: $L : \langle n, x \rangle - b = 0$ mit $n \in U^{\perp}, ||n|| = 1, b \in \mathbb{R}$

- Abstand eines Punktes $y \in \mathbb{R}$: $d(y, L) = | \langle n, y \rangle - b|$

**Adjungierte Abbildung** $\Phi^*$:
$\langle \Phi(x), y\rangle = \langle x, \Phi^*(y)\rangle \ \forall\, x \in V, y \in W$

- V endlichdimensional $\Rightarrow \Phi^*$ existiert und ist eindeutig
- Ist A die Abbildungsmatrix von $\Phi$ bezüglich zweier ONBs, so ist $A^T$ die Abbildungsmatrix von $\Phi^*$
- $(\Phi^*)^* = \Phi$
- $(a\Phi)^* = a\Phi^* \ \forall\, a \in \mathbb{R}$
- $(\Phi + \Psi)^* = \Phi^* + \Psi^*$
- $(\Theta \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Theta^*$

$\Phi$ **selbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = \Phi$
- $\Leftrightarrow$ Es existiert eine ONB von V aus Eigenvektoren von $\Phi$
- $\Leftrightarrow$ A symmetrisch ($A^T = A$) bezüglich einer ONB

$\Phi$ **antiselbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = -\Phi$
- $\Leftrightarrow$ A antisymmetrisch ($A^T = -A$) bezüglich einer ONB

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **orthogonal**: $AA^T = A^TA = E$

$\Phi$ **Isometrie**: $\forall\, x, y \in V : \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

- $\Phi^* = \Phi^{-1}$
- $\Leftrightarrow \ \forall\, x \in V : ||\Phi(x)|| = ||x||$
- $\Leftrightarrow B = (x_1, ..., x_n)$ ONB von V und $\Phi(x_1), ..., \Phi(x_n)$ ebenfalls eine ONB von V bilden
- $\Leftrightarrow \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi = id$
- $\Leftrightarrow$ Abbildungsmatrix A von $\Phi$ bezüglich zweier ONBs orthogonal, also $AA^T = A^TA = E$

**Adjungierte Abbildung** $\Phi^*$:
$\langle \Phi(x), y\rangle = \langle x, \Phi^*(y)\rangle \ \forall\, x \in V, y \in W$

- V endlichdimensional $\Rightarrow \Phi^*$ existiert und ist eindeutig
- Ist A die Abbildungsmatrix von $\Phi$ bezüglich zweier ONBs, so ist $\overline{A}^T$ die Abbildungsmatrix von $\Phi^*$
- $(\Phi^*)^* = \Phi$
- $(a\Phi)^* = \overline{a}\Phi^* \ \forall\, a \in \mathbb{C}$
- $(\Phi + \Psi)^* = \Phi^* + \Psi^*$
- $(\Theta \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Theta^*$

$\Phi$ **selbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = \Phi$
- $\Leftrightarrow$ Es existiert eine ONB von V aus Eigenvektoren von $\Phi$, und alle Eigenwerte von $\Phi$ sind reell
- $\Leftrightarrow$ A hermitesch ($\overline{A}^T = A$) bezüglich einer ONB

$\Phi$ **antiselbstadjungiert**

- $\Leftrightarrow \Phi^* = -\Phi$
- $\Leftrightarrow$ A schiefhermitesch ($\overline{A}^T = -A$) bezüglich einer ONB

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **unitär**: $A\overline{A}^T = \overline{A}^TA = E$

$\Phi$ **Isometrie**: $\forall\, x, y \in V : \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

- $\Phi^* = \Phi^{-1}$
- $\Leftrightarrow \ \forall\, x \in V : ||\Phi(x)|| = ||x||$
- $\Leftrightarrow B = (x_1, ..., x_n)$ ONB von V und $\Phi(x_1), ..., \Phi(x_n)$ ebenfalls eine ONB von V bilden
- $\Leftrightarrow \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi = id$
- $\Leftrightarrow$ Abbildungsmatrix A von $\Phi$ bezüglich zweier ONBs unitär, also $A\overline{A}^T = \overline{A}^TA = E$

**Normalform einer Isometrie bestimmen**:

1. Überprüfen, ob Basis von V ONB ist bzw. ob $A_\Phi$ orthogonal ist
2. $A + A^T$ berechnen
3. Normalform konstruieren:
   - +2 p-facher Eigenwert von $A + A^T \Rightarrow$ +1 p-facher Eigenwert von $\Phi$
   - -2 q-facher Eigenwert von $A + A^T \Rightarrow$ -1 q-facher Eigenwert von $\Phi$
   - $|c| \neq 2$ l-facher Eigenwert von $A + A^T \Rightarrow \frac{l}{2}$ Drehkästchen der Form $\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$

     mit $\cos\omega = \frac{c}{2}, \sin\omega = \sqrt{1 - (\cos\omega)^2}$

**Orthogonale Matrix S mit $\tilde{A} = S^T AS$ bestimmen**:

1. Eigenraum $E_1$ bzw. $E_{-1}$ zum Eigenwert 1 bzw. -1 finden ($\rightarrow$ Drehachse)
2. Drehebene $E_1^{\perp}$ bzw. $E_{-1}^{\perp}$ bestimmen (ausprobieren!)
3. Vektoren aus $E_1$ und $E_1^{\perp}$ bzw. $E_{-1}$ und $E_{-1}^{\perp}$ mit Gram-Schmidt orthogonalisieren, nebeneinander geschrieben ergeben sie die Matrix S.

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ **normal**: $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$

$\Phi$ **normal**: $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$

- $\Leftrightarrow$ Abbildungsmatrix A von $\Phi$ ist bezüglich einer ONB normal
- $\Leftrightarrow$ $\Phi^*$ existiert und $||\Phi(x)|| = ||\Phi^*(x)||$
- $\Leftrightarrow$ es existiert eine ONB von V aus Eigenvektoren von $\Phi$ (nur für V unitär!)
- $\Rightarrow$ Kern $\Phi$ = Kern $\Phi^*$

**Für euklidische und unitäre Vektorräume gilt**:

- x Eigenvektor von $\Phi$ zum Eigenwert c $\Leftrightarrow$ x Eigenvektor von $\Phi^*$ zum Eigenwert $\overline{c}$
- Eigenvektoren von $\Phi$ zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

$\mathbb{A}$ **affiner Raum** (nichtleere Menge, deren Elemente Punkte heißen) bezüglich Vektorraum V, falls gilt:

1. Zu jedem $P \in \mathbb{A}$ und jedem $x \in V$ gibt es genau ein $Q \in \mathbb{A}$ mit $\overrightarrow{PQ} = x$
2. Für alle $P, Q, R \in \mathbb{A}$ gilt: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$L \subseteq \mathbb{A}$ **Affiner Unterraum** $:\Leftrightarrow\ \exists\ P \in L : U_L := \left\{\overrightarrow{PQ} | Q \in L\right\}$ ist Untervektorraum von V.

- $U_L$ ist unabhängig von der Wahl des Punktes $P \in L$ und wird Richtungsraum genannt.
- Affine Unterräume $L_1$ und $L_2$ mit den Richtungsräumen $U_1$ und $U_2$ heißen parallel $:\Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.
- Parameterdarstellung 1. Art: $L = \left\{X \in \mathbb{A} | \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^k a_i \overrightarrow{P_0 P_i}, a_i \in \mathbb{K}\right\}$
- Parameterdarstellung 2. Art: $L = \left\{X \in \mathbb{A} | \overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^k a_i \overrightarrow{OP_i}, a_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^k a_i = 1\right\}$

$P_1, ..., P_k$ **affin unabhängig** $:\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P_1}, ..., \overrightarrow{P_0 P_k}$ linear unabhängig.

$P \in \mathbb{A}$ **Affinkombination** der Punkte $P_0, ..., P_k$ :
$\Leftrightarrow\ \exists\ O \in \mathbb{A}$ und $a_0, ..., a_k \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=0}^k a_i = 1$, so dass $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^k a_i \overrightarrow{OP_i}$ gilt.

$\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ **affine Abbildung** ($O, O'$ Ursprünge von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$)

- $\Leftrightarrow$ es existiert lineare Abbildung $\Phi : V \rightarrow W$ mit $\Phi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$
- $\Rightarrow\ \exists\ \Phi : V \rightarrow W,\ w \in W : \overrightarrow{O'\varphi(X)} = \Phi(\overrightarrow{OX}) + w\ \forall\ X \in \mathbb{A}$

**Translation**: $\exists\ v \in V :\ \forall\ P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{P\varphi(P)} = v$

**Streckung** mit Zentrum $Z \in \mathbb{A}$ und Streckfaktor $c \in \mathbb{K}$: $\forall\ P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{Z\varphi(P)} = c\overrightarrow{ZP}$

**Fixpunkt P**: $\varphi(P) = P$

**Fixraum L**: $\varphi(L) = L$

- $\Leftrightarrow \Phi(U) = U$ und $\exists\ P \in L$ mit $\varphi(P) \in L$

**Quadrik**: Punktmenge $Q = \left\{ x \in \mathbb{A} | \overrightarrow{OX} = x,\ \beta(x,x) + 2\Phi(x) + c = 0 \right\}$ eines n-dimensionalen reellen affinen Raums $\mathbb{A}$ mit symmetrischer Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ und Linearform $\Phi : V \to \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

**Affine Normalformen**:

1. $x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 = 0$ mit $p \geq r - p$
2. $x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 = 1$
3. $x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 = 2x_n$ mit $r < n, p \geq r - p$

**Abbildungsmatrix der symmetrischen Bilinearform** bestimmen, die eine Quadrik $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + ... + b_1x_1x_2 + b_2x_1x_3 + b_3x_2x_3...$ als quadratische Form hat:

1. Die Faktoren $a_i$ vor den Quadraten kommen auf die Diagonale
2. Der Wert $\frac{b_i}{2}$ kommt an die Stelle der beiden zugehörigen Indices von x, für $x_1x_2$ also an (1,2) und (2,1)
3. Im Dreidimensionalen sieht die Matrix also folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \frac{b_1}{2} & \frac{b_2}{2} \\ \frac{b_1}{2} & a_2 & \frac{b_3}{2} \\ \frac{b_2}{2} & \frac{b_3}{2} & a_3 \end{pmatrix}$$