Physik I - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2004/05, Prof. Drexlin

Fehlerrechnung

Mittelwert (Arithmetisches Mittel) $\overline{x}$ und wahrer Wert x_w:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad x_w = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Standardabweichung σ einer Einzelmessung und σ_m des Mittelwertes:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}-x_i\right)^2} \qquad \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{n\left(n-1\right)}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}-x_i\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ \sigma$$

Mittelwert von n Meßwerten, die in k Intervallen x_i gemessen wurden:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

Normierte Gaußfunktion:

- σ: Breite der Kurve
- Maximum: x_w!
- Vertrauensbereich: $x_w = \overline{x} \pm n \cdot \sigma$

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ e^{\frac{-\left(x-x_w\right)^2}{2\sigma^2}}$$

Poisson-Verteilung:

$$\frac{\overline{x}}{x!}e^{-\overline{x}}$$

Fehlerfortpflanzung - Standartabweichung der Funktion $f\left(x,y\right)$:

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Mittlere quadratische Abweichung (n Messwerte $x_1, ..., x_n$ mit Messwerten $y_1, ..., y_n$:

$$\chi^2 = \sum\left(y_i - f\left(x_i\right)\right)^2 \text{ ...minimieren!}$$

Formeln zur Bestimmung der Ausgleichsgerade (Regressionsgerade) $y = a * x$ aus den Messwerten:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Translation eines Massenpunktes

Kinematik
Ortsvektor:

$$\vec{r}\left(t\right) = \begin{pmatrix} x\left(t\right) \\ y\left(t\right) \\ z\left(t\right) \end{pmatrix} \quad \text{[Einheit: } m\text{]}$$

Geschwindigkeit: $\vec{v}\left(t\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$

Beschleunigung: $\vec{a}\left(t\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$

Dynamik
Impuls (bzw. Bewegungszustand): $\vec{p} = m\vec{v} \quad \left[kg\frac{m}{s}\right]$

Kraft: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \quad \left[kg\frac{m}{s^2} = Newton = N\right]$

Hangabtriebskraft: $\vec{F}_{||} = m\vec{g}\sin\alpha$

Federkraft (Hook'sches Gesetz): $\vec{F}_F = -k\vec{x} \quad k: Federkonstante \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Gravitationskraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GmM}{R^2}\vec{r}$

(Normalkraft $\vec{N}$, Haftreibungskoeffizient μ_H, Gleitreibungskoeffizient μ_G)

Haftreibungskraft: $f_H = \mu_H\vec{N}$

Gleitreibungskraft: $f_G = \mu_G\vec{N}$

Arbeit, Energie und Kraftfelder

Arbeit = Kraft x Weg, die Arbeit ist skalar!

$$W = \int_{P1}^{P2} \vec{F}d\vec{r} \quad [Nm = Joule]$$

Leistung: $P = \frac{dW}{dt} \quad \left[\frac{J}{s} = Watt\right]$

Im konservativen Kraftfeld gilt ($v(\vec{r})$: Potential):

$$W = \oint \vec{F}d\vec{r} = 0 \qquad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}v(\vec{r}) = -grad\ v(\vec{r}) \qquad rot\ \vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2, \quad W = \Delta E_{kin}$

Potentielle Energie: $E_{pot} = mgh, \quad W = \Delta E_{pot}$

Systeme von Massenpunkten, Stöße

Massenschwerpunkt (CM = centre of mass) (Volumen V, Dichte $\varrho = \frac{m}{V}$):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{m}\int \vec{r}dm = \frac{\varrho}{m}\int \vec{r}(\vec{r})\,dV$$

Schwertpunktgeschwindigkeit: $\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i$

Schwerpunktbeschleunigung: $\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i a_i$

Gesamtimpuls: $\vec{P}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{v}_{CM}$, im abgeschlossenen System erhalten!

Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

Elastischer Stoß: Impuls und Energie erhalten, $v_{1,i} + v_{1,f} = v_{2,i} + v_{2,f}$

Inelastischer Stoß: nur Impulserhaltung. Innere Energie $Q = -\frac{1}{2}\mu v_{rel}^2$

Rotation

Radius R, Bahngeschwindigkeit v, Umlaufzeit T, Frequenz ν, Länge des Kreisbogens s

Rotationskinematik
Winkel im Bogenmaß: $\varphi = \frac{s}{R} \quad \left[1\ rad = \frac{360°}{2\pi}\right]$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = \frac{a_T}{R} \quad$ (a_T: Tangentialbeschleunigung)

Zentripetalbeschleunigung: $a_z = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \quad$ Zentripetalkraft $F_z = ma_z$

Rotationsdynamik
Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = J\vec{\omega} \quad \left[kg\frac{m^2}{s}\right]$

Drehmoment: $\vec{D} = \frac{dL}{dt} = \vec{r}_0 \times \vec{F} = J\alpha \quad \left[kg\frac{m^2}{s^2} = Nm\right]$ ($\vec{r}_0$: Kraftarm $\perp \vec{F}$)

Trägheitsmoment: $J = \sum_i^N m_i a_{i,\perp}^2 = \int_0^R a^2 dm = \varrho \int_0^R a^2 dV = \varepsilon M R^2$ ($\varepsilon = 0 \ldots 1$, a: Abstand zur Drehachse)

Rotationsenergie: $E_{rot} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{D}(\varphi) d\vec{\varphi} = \frac{1}{2} J\omega^2$

Steiner'scher Satz: $J_B = J_{CM} + ma^2$ (a: Abstand der Drehachse in B zu CM)

Hebelgesetz: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}$

Kreisel
Nutation: gemeinsame Bewegung der Figurenachse $\vec{c}$ und der momentanen Drehachse $\vec{\omega}$ um die raumfeste Drehimpulsachse $\vec{L}$ (z.B. rotationssymm. Kreisel erhält kurzen Stoß)

Präzission: Es wirkt ein äußeres Drehmoment $\vec{D}$, $\vec{L}$ ist nicht mehr raumfest. Präzissionsfrequenz: $\omega_P = \frac{D}{L \sin\alpha} = \frac{m\vec{g}\vec{r}}{J\vec{\omega}}$

Bezugssysteme
Intertialsysteme bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit und sind zur Beschreibung physikalischer Gesetze äquivalent.

Rotierende Bezugssysteme (Geschw. im ruhenden System $\vec{v}$, Geschw. im beschl. System $\vec{v}\,'$)
$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}$ ($\vec{u}$: Relativgeschwindigkeit $\perp\vec{\omega}$, $\perp\vec{r}$)

Corioliskraft: $\vec{F}_C = 2m(\vec{v}\,' \times \vec{\omega})$

Zentrifugalkraft: $\vec{F}_{Zf} = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$

Gravitation

Kepler'sche Gesetze

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht
2. Der Radiusvektor (Fahrstrahl) von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer größten Halbachsen:
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = const$$

Newton'sches Gravitationsgesetz: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\vec{r}}$

Gravitationspotenzial: $E_{pot} = -G\frac{mM}{r}$, ausgedehnte Körper: $dE_{pot} = -G\frac{m\,dM}{r}$

Relativistische Mechanik

Transformationen
Inertialsystem S' bewegt sich mit $v = v_x$ relativ zum Inertialsystem S. Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ mit Geschwindigkeit $\vec{u}$, Beschleunigung $\vec{a}$ und Zeit t („'" gemessen in S').

Galilei		**Lorentz**	
$x' = x - vt$	$x = x' + vt$	$x' = \gamma(x - vt)$	$x = \gamma(x' + vt')$
$y' = y$	$y = y'$	$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$	$z' = z$	$z = z'$
$t' = t$	$t = t'$	$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$	$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$
$u' = u - v$	$u = u' + v$	$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$	$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$
$a' = a$	$a = a'$	$u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$	$u_{y,z} = \frac{u'_{y,z}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$

Lorentzfaktor: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Zeitdilatation: $\Delta t = \gamma\, \Delta t'$
($\Delta t'$ gemessen im Ruhesystem des Objekts, Δt gemessen im System S, in dem sich die Uhr bewegt.)

Längenkontraktion (Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion): $l = \gamma\, l'$
(l: Eigenlänge im ruhenden Bezugssystem, l' gemessen im bewegten System)

Relativistische Dynamik
Relative Massenzunahme: $m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Relativistischer Impuls: $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$

Relativistische Kraft: $\vec{F} = m_0 a \gamma^3 \frac{v}{c^2} \vec{v} + m\vec{a}$

Verbindung von Energie und Trägheit: $E = mc^2$

Relativistische kinetische Energie: $E_{kin} = m_0 c^2(\gamma - 1)$

Gesamtenergie: $E_{tot} = E_{kin} + m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E_{tot}^2 = p^2 c^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$

Schwingungen

Amplitude A, Phase φ, Kreisfrequenz $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Freier harmonischer Oszillator
Hook'sches Gesetz: $\vec{F} = -k\vec{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ Differentialgleichung: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

Exponential-Ansatz ($c, \lambda \in \mathbb{C}$): $x(t) = ce^{\lambda t}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm\, i\,\omega_0$

Darstellungsformen der Bewegungsgleichung:

1. $x(t) = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t}$ $\quad$ ($c = a + ib; a, b \in \mathbb{R}$ aus Anfangsbedingungen)
2. $x(t) = |c|[e^{i(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-i(\omega_0 t+\varphi)}]$ $\quad$ (Euler-Darstellung aus $c = |c|e^{i\varphi}$)
3. $x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$ $\quad$ (aus $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, c_1 = c + c^* = |c|2\cos\varphi, c_2 = i(c - c^*) = |c|(-2)\sin\varphi$)
4. $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Schwingungsdauer (Periode): $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Freier gedämpfter Oszillator
Differentialgleichung: $\frac{md^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad$ ($\gamma = \frac{b}{2m}$: Dämpfungskonstante)

Exponential-Ansatz liefert: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

1. Schwache Dämpfung (Schwingfall): $\omega_0 > \gamma$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$ $\quad$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
   $x(t) = e^{-\gamma t}(ce^{i\omega t} + c^* e^{-i\omega t}) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad$ ($e^{-\gamma t}$: exponentieller Dämpfungsterm)
   - Relaxationszeit τ der Energie (beim gedämpften Oszillator nicht erhalten!).
     $\tau = \frac{m}{b} = \frac{1}{2\gamma}$, $\quad$ $E_{tot} = E_0 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
   - Logarithmisches Dekrement: $\delta = ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) = \gamma T = \frac{T}{2\tau}$
   - Gütefaktor Q: $\frac{Q}{2\pi} = \frac{\tau}{T}, Q = \omega\tau$ $\quad$ (hohe Güte $\rightarrow$ geringe Dämpfung)
2. Starke Dämpfung (Kriechfall): $\gamma > \omega_0$ $\quad$ (Überdämpfung) $\quad\Rightarrow\quad$ $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \alpha$ $\quad$ (α reell!)
   $x(t) = e^{-\gamma t}[c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}]$ $\quad$ (Keine Schwingung!)
3. Aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$ $\quad$ (Entartung) $\quad\Rightarrow\quad$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma = -\omega_0$
   Modifizierter Ansatz: $x(t) = c(t)e^{\lambda t}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $x(t) = \underbrace{(c_1 t + c_2)}_{=c(t)} e^{-\gamma t}$

Erzwungene Schwingungen
Inhomogene DGL: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

- Homogene DGL: allgemeine Lösung $A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$
- Inhomogene DGL: spezielle Lösung $A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ (ω: Erregerfrequenz, ω_1 Frequenz der freien gedämpften Schwingung)

$\Rightarrow x(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

Phasenverschiebung φ_2: $\tan\varphi_2 = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Amplitude A_2: $A_2 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

Resonanzfrequenz: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

Schwebung
$x(t) = \underbrace{2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t\right)}_{\text{Amplitude } A(t)} \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t\right)}_{\text{harm. Schwingung}}$ (Die harmonische Schwingung hat die 'Mittenfrequenz')

Pendel
Mathematisches Pendel: $a_\perp = \alpha l = \ddot{\varphi} l \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$ (harmonische Näherung: $\sin\varphi = \varphi$)

Physikalisches Pendel: $\ddot{\varphi} + \frac{RMg}{J}\varphi = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{RMg}{J}}$

Wellen

Frequenz ν, Wellenlänge λ, Schwingungsperiode T, Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, Dichte $\varrho = \frac{dm}{V}$, Amplitude A, lineare Massendichte μ

- transversale Wellen: Auslenkung $\perp$ Ausbreitung
- longitudinale Wellen: Auslenkung $||$ Ausbreitung

Phasengeschwindigkeit: $v_{Ph} = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}$ bzw. $\lambda = v_{Ph}T$ (Dispersionsrelation)

Wellenfunktion: $\Psi(z,t) = A\sin(\omega t - kz) = ce^{i(\omega t - kz)} = A\sin\left\{\omega(t - \frac{z}{v_{Ph}})\right\}$

Wellengleichung für ebene Wellen: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{Ph}^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

Wellengleichung einer entspannten Saite: $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\mu}{|F_S|}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ ($v_{Ph} = \sqrt{\frac{|F_S|}{\mu}}$)

Wellengleichung in 3D: $\Delta\vec{\Psi} = \frac{1}{v_{Ph}^2}\frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial t^2}$ (Laplace-Operator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

Intensität: $I = \frac{1}{2}\,\varrho\, v_{Ph}\, A^2\omega^2$

Leistung: $P = \frac{1}{2}\,\mu\, v_{Ph}\, A^2\omega^2$

Gruppengeschwindigkeit: $v_G = \frac{d\omega}{dk} = v_{Ph} + k\frac{dv_{Ph}}{dk} = v_{Ph} - \lambda\frac{dv_{Ph}}{d\lambda}$

Schallwellen
Boltzmann-Konstante $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$, absolute Temperatur T, Molekülmasse m, Hörschwelle $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$

Schallgeschwindigkeit: $v_S = \sqrt{\frac{kT}{m}}$

Lautstärke: $LS = 10\ \log\frac{I}{I_0}$ $[dB]$

Doppler-Effekt

	hin	weg
Quelle bewegt sich mit u_Z	$\lambda = \lambda_0 - u_Z T$ $f = f_0\frac{1}{1-\frac{u_Z}{v_{Ph}}}$	$\lambda = \lambda_0 + u_Z T$ $f = f_0\frac{1}{1+\frac{u_Z}{v_{Ph}}}$
Beobachter bewegt sich mit u_B	$f = f_0(1 + \frac{u_B}{v_{Ph}})$	$f = f_0(1 - \frac{u_B}{v_{Ph}})$

Doppler-Verschiebung: $\Delta f = f - f_0$

Öffnungswinkel des Mach'schen Kegels: $\sin\beta = \frac{v_P h}{u}$

Feste Körper

Elastische Verformung
Dehnung $\frac{\Delta L}{L}$, Spannung $\frac{F}{A}$, Elastizitätsmodul E $[\frac{N}{m^2}]$, relative Volumenabnahme $\frac{\Delta V}{V}$, Fläche A, Kraft F

Zugkräfte im linearen Bereich: $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{A}$

Schermodul: $G = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{F/A}{\tan\theta}$ $\quad [\frac{N}{m^2}]$

Kompressionsmodul: $K = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V}$

Thermische Eigenschaften
Längenänderung: $\frac{\Delta L}{L} = \alpha\Delta T$ $\quad$ (α: Längenänderungskoeffizient)

Volumenänderung: $\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha\Delta T$

Wärmetransport:

- Wärmeleitung: Energietransport durch Stöße, ortsfeste Atome
- Konvektion: Energietransport durch Stofftransport
- Strahlung: Energietransport durch elektromagnetische Strahlung

Wärmestrom: $\frac{dQ}{dt} = \frac{\text{Wärmemenge } dQ}{\text{Zeiteinheit } dt}$

Temperaturgradient: $\frac{dT}{dx} = \frac{\text{Temperaturänderung } dT}{\text{Längeneinheit } dx}$

Wärmestrom: $\frac{dQ}{dt} = -\lambda A\frac{dT}{dx}$ $\quad$ (λ: thermische Leitfähigkeit $[\frac{W}{mK}]$

Flüssigkeiten

Pascal'sches Gesetz: $p(h) = p_0 + \varrho_{Fl}\, g\, h$ $\quad$ (h: Höhe)

Auftriebskraft = Gewichtskraft der durch den Körper verdrängten Flüssigkeit

Hydraulische Presse: $F_2 = F_1\frac{A_2}{A_1}, h_2 = \frac{A_1}{A_2}h_1$