

Physik III - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2005/06, Prof. Kalt

Optik

Elektromagnetische Wellen im Vakuum

(Elektrische Feldstärke: $\vec{\mathcal{E}}$ [$\frac{N}{As} = \frac{V}{m}$], magnetische Feldstärke \vec{B} [$\frac{Vs}{m^2} = T$])

Wellengleichung: $\Delta\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}$

Ebene transversale elektrische Welle: $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

- Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi\nu$ (Frequenz ν)
- Wellenlänge: λ
- Wellenvektor: \vec{k}
- Wellenzahl: $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Magnetfeld: $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}})$

Für ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum gilt:

- $\vec{k} \perp \vec{\mathcal{E}} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$
- $|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{\mathcal{E}}|$
- $\vec{\mathcal{E}}$ und \vec{B} in Phase

Linear polarisierte Welle: $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\omega t - kz)$ in z-Richtung mit den Komponenten \mathcal{E}_x und \mathcal{E}_y in Phase

- $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{0x} \cos(\omega t - kz)$
- $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \cos(\omega t - kz)$

Zirkular polarisierte Welle: gleiche Amplituden $\mathcal{E}_{0x} = \mathcal{E}_{0y} = \mathcal{E}_0$, aber 90° Phasenverschiebung:

- $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - kz)$
- $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})$
- σ^+ -Licht: Rechtsschraube in Ausbreitungsrichtung ($\hat{=}$ links zirkular)
- σ^- -Licht: Linksschraube in Ausbreitungsrichtung ($\hat{=}$ rechts zirkular)

Elliptisch polarisierte Welle: $\mathcal{E}_{0x} \neq \mathcal{E}_{0y}$ oder Phasenverschiebung zwischen \mathcal{E}_x und $\mathcal{E}_y \neq 90^\circ$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{H} = \epsilon_0 \cdot c^2 \cdot \vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}$ [$\frac{W}{m^2}$]

- $S = |\vec{S}| = \epsilon_0 c \mathcal{E}^2$
- $\vec{S} \parallel \vec{k}$
- S = „Energie, die pro Zeit durch Flächeneinheit $\perp \vec{k}$ transportiert wird“ (Energiestromdichte)

Intensität: $I = \langle S(t) \rangle = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot c \cdot \vec{\mathcal{E}}_0^2$

Dispersionsrelation für Licht im Vakuum: $\omega = c \cdot k$

Lichtausbreitung im Medium

Wellengleichung im Medium: $\Delta \vec{\mathcal{E}} - \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0$

Monochromatische, ebene elektromagnetische Welle: $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

Dispersionsrelation im transparenten Medium: $\omega = \frac{c}{n} \cdot k$

Im Medium mit Brechungsindex $\tilde{n} = n - i\kappa$ gilt:

- Wellenlänge $\lambda = \frac{\lambda_{vak}}{n}$
- Phasengeschwindigkeit $c = \frac{c_{vak}}{n}$
- Der Realteil gibt die Dispersion, der Imaginärteil die Absorption der Welle an
- In durchsichtigen Medien (Glas, Wasser, Luft...) gilt: $\tilde{n} \approx n$

Beersches Absorptionsgesetz: $I = I_0 e^{-\alpha z}$

- Absorptionskoeffizient $\alpha = 2 \cdot k_{vak} \cdot \kappa = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_{vak}} \quad [m^{-1}]$

Reflexions- und Brechungsgesetz:

- Beim Übergang zwischen zwei Medien kann sich die Wellenlänge ändern, aber nicht die Frequenz ω .
- Einfallswinkel $\alpha =$ Reflexionswinkel α'
- Snelliussches Brechungsgesetz: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c'_1}{c'_2} = \frac{n_2}{n_1}$

Fresnel-Formeln (e=einfallend, r=reflektiert, g=gebrochen, A=Amplitude):

- Reflexionskoeffizient \perp zur Einfallsebene: $\varrho_s = \frac{A_{rs}}{A_{es}} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$
- Transmissionskoeffizient \perp zur Einfallsebene: $\tau_s = \frac{A_{gs}}{A_{es}} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$
- Reflexionskoeffizient \parallel zur Einfallsebene: $\varrho_p = \frac{A_{rp}}{A_{ep}} = \frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)}$
- Transmissionskoeffizient \parallel zur Einfallsebene: $\tau_s = \frac{A_{gp}}{A_{ep}} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)}$

Reflexionsvermögen: $R = \frac{I_r \cos \alpha'}{I_e \cos \alpha} \approx \frac{I_r}{I_e} = \frac{A_r^2}{A_e^2}$

- Bei senkrechtem Einfall gilt: $R(\alpha = 0) = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$

Transmissionsvermögen: $T = \frac{I_g \cos \beta}{I_e \cos \alpha} = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} \frac{A_g^2}{A_e^2}$

Brewsterwinkel: $\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$

- \Leftrightarrow reflektierte Welle \perp gebrochene Welle $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$
- Keine Reflexionsverluste unter dem Einfallswinkel α_B

Grenzwinkel der Totalreflexion: $\sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1}$

- Nur beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium ($n_1 > n_2$)

Phasensprung von π der zur Einfallsebene senkrechten Komponente

- bei reflexion am optisch dichteren Medium

Lichtausbreitung in anisotropen Medien

In anisotropen Medien sind Ausbreitungsrichtung der Phasenflächen (\vec{k}) und die Richtung der Energieausbreitung (\vec{S}) i.a. verschieden

- \vec{E} und \vec{k} sind keine Vektoren mehr, sondern Tensoren

Polarisiertes Licht kann erzeugt werden durch Reflexion unter dem Brewsterwinkel, durch dichroitische Dünnschichtpolarisation und durch optisch doppelbrechende Kristalle.

$\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}d(n_3 - n_1)$

- Zirkular polarisierte Welle für $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ bei $\alpha = 45^\circ$

Geometrische Optik

(Gegenstandsweite g , Bildweite b , Gegenstandsgröße G , Bildgröße B)

Fermat'sches Prinzip: Licht wählt den Weg mit minimaler Lichtlaufzeit

Reflexion am sphärischen Spiegel mit Radius r :

- Brennweite: $f = \frac{1}{2} \cdot r$
- Abbildungsgleichung: $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Abbildungsmaßstab: $\beta = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$

Brechung an gekrümmter Grenzfläche mit Radius r :

- Brennweite: $f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot r$
- Abbildungsgleichung: $\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{f_1}$

Brechung an dünner Linse mit Krümmungsradien r_1, r_2 :

- Brechkraft: $\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ [*Dioptrie* = $dbt = m^{-1}$]
- Brennweite für $r_1 = r_2 = r$: $f = \frac{r}{n-1}$
- Abbildungsgleichung: $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$
- Abbildungsmaßstab: $\beta = \frac{f}{f-g}$

Brechung an dicker Linse mit Krümmungsradien r_1, r_2 und Dicke d :

- Brechkraft: $\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1) \cdot d}{n \cdot r_1 \cdot r_2} \right)$
- Entfernung der Hauptebenen vom Linsenrand:
 - $h_1 = -\frac{(n-1) \cdot f \cdot d}{n \cdot r_2}$
 - $h_2 = -\frac{(n-1) \cdot f \cdot d}{n \cdot r_1}$
- Abbildungsgesetz mit b, g, f bezogen auf die Hauptebenen: $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Linsensysteme:

- Brechkraft: $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$
- Abbildungsmaßstab: $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$

Matrixmethoden der geometrischen Optik

Translation: $(n\alpha_1, y_1) \rightarrow (n\alpha_2, y_2)$

$$\begin{pmatrix} n\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d}{n} & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{T}} \cdot \begin{pmatrix} n\alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Reflexion am spärigen Spiegel: (Krümmung „ r “)

$$\begin{pmatrix} n\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2n}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{R}_s} \cdot \begin{pmatrix} n\alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Für ebenen Spiegel:

$$\begin{pmatrix} n\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{R}_e} \cdot \begin{pmatrix} n\alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Brechung an Kugeloberfläche mit Radius r_1 :

(mit Brechkraft D_{12} der gekrümmten Fläche: $D_{12} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$)

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -D_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{B}_{12}} \cdot \begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrix einer Linse:

$$\begin{pmatrix} n_3\alpha_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \frac{D_{23} \cdot d}{n_2} & -D_{12} - D_{23} + \frac{D_{12} \cdot D_{23} \cdot d}{n_2} \\ \frac{d}{n_2} & 1 - \frac{D_{12} \cdot d}{n_2} \end{pmatrix}}_{\widetilde{M}_L} \cdot \begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

speziell: Transformationsmatrix für dünne Linse, $d \approx 0$:

$$\widetilde{M}_{dL} = \begin{pmatrix} 1 & (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{M}_{AB} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ G \end{pmatrix}$$

mit $\widetilde{M}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{g}{f} & -\frac{1}{f} \\ g + b - \frac{b \cdot g}{f} & 1 - \frac{b}{f} \end{pmatrix}$, d.h. für achsenparallelen Strahl ($\alpha_1 = 0$): $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{G}{f} \\ G \cdot (1 - \frac{b}{f}) \end{pmatrix}$

Jones-Vektoren und -Matrizen

Licht propagiert in z-Richtung: $\vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x} \cdot e^{i\varphi_x} \\ \mathcal{E}_{0y} \cdot e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$, $|\vec{\mathcal{E}}| = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$

Jones-Vektor: $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{\mathcal{E}}|} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x} \cdot e^{i\varphi_x} \\ \mathcal{E}_{0y} \cdot e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$ (beschreibt die Polarisation von Licht)

- Horizontal polarisiertes Licht: $\vec{J}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Vertikal polarisiertes Licht: $\vec{J}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Linear polarisiertes Licht mit Winkel ϑ relativ zur x-Richtung: $\vec{J}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$
- Linear polarisiertes Licht mit Winkel 45° relativ zur x-Richtung: $\vec{J}_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Zirkular polarisiertes Licht:
 - σ^+ -Licht: $\vec{J}_{\sigma^+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$
 - σ^- -Licht: $\vec{J}_{\sigma^-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

- Elliptisch polarisiertes Licht: $\vec{J} = \frac{1}{|\vec{\mathcal{E}}|} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$

Jones-Matrizen (beschreiben polarisationsändernde Elemente):

- Linearer Polarisator (max. Transmission || x-Richtung): $M_{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Linearer Polarisator (max. Transmission unter Winkel θ gegen x-Achse): $M_{(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$
- Optische Verzögerungsplatte, die die Polarisations Ebene dreht: $M = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\varphi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\varphi_y} \end{pmatrix}$
- $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen: $M_{\frac{\lambda}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
- $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen: $M_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Kohärenz

Zeitliche Kohärenz: die Phasendifferenz zweier Teilwellen in einem Raumpunkt \vec{r} ändert sich während der Beobachtungszeit Δt um weniger als 2π

Kohärenzzeit: Maximale Zeitspanne Δt_C , während der sich Phasendifferenzen zwischen allen im Punkt \vec{r} überlagerten Teilwellen von höchstens 2π ändern

$$\Delta t_C = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}$$

($\Delta\nu$: Frequenzbreite)

Räumliche Kohärenz: die räumliche Differenz der Phase $\varphi_i(\vec{r}_1) - \varphi_i(\vec{r}_2)$ beliebiger Teilwellen $\vec{\mathcal{E}}_i$ ändert sich während der Beobachtungszeit um weniger als 2π

Kohärenzlänge: $l_C = c \cdot \Delta t_C$

Kohärenzfläche: Fläche \perp Ausbreitungsrichtung, für die gilt: $\Delta\varphi_i(\vec{r}) = 0$

Kohärenzvolumen: Kohärenzlänge \times Kohärenzfläche

Interferenz

Wegdifferenz: Δs

Konstruktive Interferenz: $\Delta\varphi = m \cdot 2 \cdot \pi$ / $\Delta s = m \cdot \lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)

- Teilwellen in Phase
- Maximale Intensität $I_{max} = c \cdot \varepsilon_0 \left(\vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2 \right)^2$

Destruktive Interferenz: $\Delta\varphi = (2m + 1) \cdot \pi$ / $\Delta s = (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)

- Teilwellen gegenphasig
- Minimale Intensität: $I_{min} = c \cdot \varepsilon_0 \left(\vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_2 \right)^2$

Kohärenzbedingung für Doppelspalt: $\Delta s_{max} \approx \frac{b \cdot d}{2 \cdot D} < \frac{\lambda}{2}$

- d: Spaltabstand, D: Abstand Spalt-Lichtquelle, b: Ausdehnung der Lichtquelle

Kohärenzfläche einer ausgedehnten Lichtquelle: $F_C = d^2 \leq \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega}$

- $\Delta\Omega$: Raumwinkel, unter dem die Lichtquelle von einem Punkt der Kohärenzfläche aus erscheint

Planparallele Platte: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s - \pi$

Michelson-Interferometer: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$

Sagnac-Interferometer: $\Delta\varphi = \frac{8\pi A}{c \cdot \lambda} \cdot \Omega \cdot \cos \theta$

- A: umlaufene Fläche, Ω : Kreisfrequenz der Drehung, θ : Winkel zwischen Drehachse und Flächennormale

Mach-Zehnder-Interferometer: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n \cdot L$ (L: Länge des Mediums)

Airy-Formeln für reflektierte und transmittierte Intensität nach Vielstrahl-Interferenz:

- $I_R = I_0 \cdot \frac{F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{1 + F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$

- $I_T = I_0 \cdot \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$

- Finesse-Koeffizient: $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$

- $\Delta\varphi$ kann verändert werden...

- durch Veränderung der Wellenlänge λ bei festem Δs : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$
- durch Variation von Δs bei festem λ

Fabry-Pérot-Interferometer: $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot n \cdot d$

- Wellenlängen, die maximal durchgelassen werden: $\lambda_m = \frac{2 \cdot n \cdot d}{m}$ ($m = 1, 2, \dots$)

- Periode der Transmissionskurve / freier Spektralbereich des FPI:

- $\delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{2 \cdot n \cdot d}{m} - \frac{2 \cdot n \cdot d}{m+1} = \frac{\lambda_m}{m+1}$

- $\delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2 \cdot n \cdot d}$

- Finesse des FPI: $F^* = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi}{4}\sqrt{F}$

- Halbwertsbreite der Transmissionsbereiche eines Interferometers: $\Delta\nu = \frac{\delta\nu}{F^*}$

Beugung

Beugung am Einzelspalt mit Breite b :

- Minima: $b \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$ ($m = 1, 2, 3, \dots$, keine 0 da dort Hauptmaximum)

- Maxima: $b \cdot \sin \theta = \frac{2m+1}{2} \cdot \lambda$ ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$)

- Intensität des in Richtung θ abgebeugten Lichts: $I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}$ mit $x = \frac{\pi \cdot b}{\lambda} \cdot \sin \theta$

Beugung an Kreisblende mit Radius R : $I(\theta) = I_0 \left(\frac{2 \cdot J_1(x)}{x} \right)^2$ mit $x = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{\lambda} \cdot \sin \theta$ und $J_1(x)$ Besselfunktion 1. Ordnung

- 1. Nullstelle von $I(\theta)$ bei $\sin \theta_1 = 0,61 \frac{\lambda}{R}$

Beugung am Gitter / Doppelspalt mit Spaltabstand d , Spaltbreite b :

- Minima: $d \cdot \sin \theta = \frac{2m+1}{2} \cdot \lambda$

- Maxima: $d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$

- Intensität: $I(\theta) = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin \theta \right]}{\left[\pi \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \sin \theta \right]^2}}_{\text{Einhüllende}} \cdot \frac{\sin^2 \left[N \cdot \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \theta \right]}{\sin^2 \left[\pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \theta \right]}$

Fraunhofer-Beugung für parallel einfallende Lichtbündel \rightarrow Beobachtung im Fernfeld

Fresnel-Beugung: divergenter bzw. konvergenter Lichteinfall \rightarrow Beobachtung im Nahfeld

Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral: $\mathcal{E}_P = \iint C \cdot \mathcal{E}_S \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} dx dy$

- Feldamplitude im Punkt P der beleuchteten Öffnung S des Schirms
- $C = i \frac{\cos \theta}{\lambda}$
- $\mathcal{E}_S = \frac{A}{R} e^{i(\omega t - kR)}$

Babinet'sches Theorem: $\mathcal{E}_P(\sigma) = \sum_i \mathcal{E}_P(\sigma_i)$

- Komplementäre Beugungsflächen ergeben gleiches Beugungsmuster

Fourier-Darstellung: Das Fraunhofer-Beugungsbild $\mathcal{E}(x', y', z_0)$ ist proportional zur Fouriertransformierten der Feldverteilung $\mathcal{E}(x, y)$ in der beugenden Öffnung.

Lichtstreuung

Kohärente Streuung: Oszillatoren regelmäßiger Anordnung (z.B. kristalliner Festkörper)

Inkohärente Streuung: statistisch verteilte oder zeitlich variierende Phasen der streuenden Oszillatoren (z.B. Gas, Flüssigkeit, Pulver...)

Mie-Streuung: Streuung an Mikropartikeln (z.B. Staub, Nebel)

Optische Instrumente

Sehwinkel: $\varepsilon = \frac{G}{g}$

- Sehwinkel = Winkel zwischen Randstrahlen

Deutliche Sehweite / Bezugssehweite: $s_0 = 25 \text{ cm}$

Vergrößerung: $V = \frac{\text{Sehwinkel } \varepsilon \text{ mit Instrument}}{\text{Sehwinkel } \varepsilon_0 \text{ ohne Instrument}}$

Lupe: Sammellinse kurzer Brennweite f

- Normalvergrößerung: $V_L = \frac{s_0}{f}$

Mikroskop: $V_M = -\frac{t \cdot s_0}{f_{OB} \cdot |f_{OK}|}$ ($t = d - f_{OK}$: optische Tubuslänge)

Fernrohr: $V_F = \frac{f_{OB}}{f_{OK}}$

Rayleigh-Kriterium: zwei punktförmige Lichtquellen lassen sich in der Bildebene trennen, falls das Maximum des einen Beugungsscheibchens auf das 1. Minimum des anderen fällt

Auflösbarer Winkelabstand: $\delta_{min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$ (D: Durchmesser der Instrumentenöffnung)

Winkelaufklärungsvermögen: $R_W = \frac{1}{\delta_{min}} = \frac{D}{1,22 \cdot \lambda}$

Auflösung Mikroskop: $\Delta x_{min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda_{Vak}}{2 \cdot n \cdot \sin \alpha} = 0,61 \cdot \frac{\lambda_{Vak}}{NA}$

- Numerische Apertur: $NA = n \cdot \sin \alpha$

Spektrales Auflösungsvermögen: $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{\Delta s_{max}}{\lambda}$ (Δs_{max} : maximaler Wegunterschied)

- $\Delta \nu \cdot \Delta T_{max} \geq 1$ (ΔT_{max} : maximale Laufzeitdifferenz)

Prismenspektrometer:

- Ablenkwinkel $\theta(\lambda)$: $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2 \sin(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{1 - n^2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$
- γ : Prismenwinkel, $\frac{dn}{d\lambda}$: Dispersion des Prismas
- Spektrales Auflösungsvermögen: $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{a}{2} \frac{d\theta}{d\lambda}$ (a: Durchmesser des eintretenden Lichtbündels)

Gitterspektrometer:

- Winkeldispersion $\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos \beta} = \left(\frac{d^2 \cos^2 \alpha}{m^2} + \frac{2 \cdot d \cdot \lambda}{m} \sin \alpha - \lambda^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$

- Spektrales Auflösungsvermögen: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq m \cdot N$
- m: Interferenzordnung, N: Gesamtzahl der beleuchteten Gitterstriche

Fresnellinse wirkt wie Linse mit Brennweite $f = s_0 = \frac{r_1^2}{\lambda}$

Thermodynamik

Gase

Boyle-Mariott'sches Gesetz: $p \cdot V = const$

Kompressibilität: $\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$ $\left[\frac{m^2}{N} \right]$

- bei konstanter Temperatur T: $\kappa = \frac{1}{p}$

Bei konstanter Temperatur gilt: Dichte $\rho \sim$ Druck p

Druck: $p = \frac{F}{A}$ $[Pa = \frac{N}{m^2}, bar = 10^5 Pa]$

- $p \cdot V = \frac{3}{2} \cdot N \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2}}_{\overline{E_{kin}}}$

Barometrische Höhenformel: $p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}}$

Absolute Temperatur T: $\frac{m}{2} \cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T$

Allgemeine Gasgleichung: $p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$

Gleichverteilungssatz: in einem Gas der Temperatur T verteilt sich die Energie der einzelnen Moleküle durch Stöße gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade

- Mittlere Energie jedes Teilchens: $\overline{E_{kin}} = f \cdot \frac{1}{2} \cdot k_B \cdot T$ (f: Zahl der Freiheitsgrade)

Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung: $f_{MB}(v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_B \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_B \cdot T}} dv$

Ficksches Gesetz: $\vec{j} = D \text{grad } n$

- Teilchenstromdichte \vec{j}
- Diffusionskonstante $D = \frac{\Lambda \bar{v}}{3}$ (Λ : mittlere freie Weglänge, \bar{v} : mittlere Geschwindigkeit)
- und $D = \frac{1}{n \cdot \sigma} \sqrt{\frac{8 \cdot k_B \cdot T}{9 \cdot \pi \cdot m}}$ (σ : Stoßquerschnitt, m : Masse, n : Dichte)

Wärmeleitfähigkeit: $\lambda = \frac{1}{12} \frac{f \cdot k_B \cdot \bar{v}}{\sigma}$ $\left[\frac{J}{m \cdot s \cdot K} \right]$

Temperatur

Längenänderung eines Stabes: $L(T_C) = L(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T_C)$

- T_C : Temperatur in °Celsius
- Linearer Ausdehnungskoeffizient $\alpha = \frac{\Delta L}{L \cdot T_C}$ (relative Längenänderung pro Grad Temperaturänderung)

Volumenänderung eines Gases (Druck konstant): $V(T_C) = V_0 \cdot (1 + \gamma_V \cdot T_C)$

- Ausdehnungskoeffizient $\gamma_V = \frac{V(T_C) - V_0}{V_0 \cdot T_C} = \frac{1}{273,15 \text{ } ^\circ C} = 3,66 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ C}$
(relative Volumenänderung pro Grad Temperaturänderung)

Absolute Temperatur: $T = T_0 \cdot (1 + \gamma \cdot T_C) = T_0 + \frac{T_0}{273,15} T_C$

Temperatur in °Celsius: $\frac{T_C}{^\circ C} = \frac{T}{K} - 273,15$

Avogadro-Konstante (# Atome / Moleküle pro Mol): $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

- 1 mol eines Gases nimmt, unabhängig von der Gasart, unter gleichen äußeren Bedingungen immer das gleiche Volumen ein (soweit Gas=ideales Gas): $V_{mol} = 22,4 \text{ dm}^3$ ($T = 0^\circ\text{C}$, $p = 1 \text{ bar}$)

Allgemeine Gaskonstante: $R = N_A \cdot k_B = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$

Zustandsgleichung des idealen Gases: $p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$

- $\nu = \frac{V}{V_{mol}}$: Zahl der Moleküle im Volumen V
- Zustandsänderungen:

T=const	isotherme Zustandsänderung	$p \cdot V = \text{const}$
p=const	isobare Zustandsänderung	$\frac{V}{T} = \text{const}$
V=const	isochore Zustandsänderung	$\frac{p}{T} = \text{const}$

Wärmemenge und spezifische Wärme

Temperaturänderung ΔT bei Energiezufuhr ΔW : $\Delta W = \Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$

- ΔQ : Wärmeenergie [$J = Nm = Ws$]
- c: spezifische Wärme
(Wärmemenge, die benötigt wird um die Temperatur einer Masse $m = 1 \text{ kg}$ um $\Delta T = 1K$ zu erhöhen)
- Wärmekapazität: $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$

Innere Energie eines Gases (N Moleküle): $U = \frac{1}{2} \cdot f \cdot N \cdot k_B \cdot T$

- Innere Energie eines Mols: $U = \frac{1}{2} \cdot f \cdot N_A \cdot k_B \cdot T$
- Freiheitsgrade: $f = f_{trans} + f_{rot} + f_{vib}$
 - Lineares Molekül mit n Atomen: $f_{trans} = 3$, $f_{rot} = 2$, $f_{vib} = 2 \cdot (3n - 5) \Rightarrow f = 6n - 5$
 - Nichtlineares Molekül mit n Atomen: $f_{trans} = 3$, $f_{rot} = 3$, $f_{vib} = 2 \cdot (3n - 6) \Rightarrow f = 6n - 6$

Spezifische Molwärme bei konstantem Volumen: $C_V = \frac{1}{2} \cdot f \cdot R = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

- Wärmemenge pro Mol: $\Delta Q = C_V \cdot \Delta T$

Spezifische Molwärme bei konstantem Volumen: $C_p = C_V + R = \frac{1}{2} (f + 2) R$

Adiabatindex: $\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$

Dulong-Petitsches Gesetz: $C_V = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot N_A \cdot k_B = 3R$ (maximaler Wert bei Festkörpern)

Wärmeleitung in Festkörpern

Durch Querschnittsfläche A fließt konstante Wärmemenge $\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$

Allgemeine Wärmeleitungsgleichung: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \Delta T$

- $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} = \lambda_T$: Temperaturleitzahl
- falls Temperaturgradient nur in eine Richtung: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Wiedemann-Franz-Gesetz (Wärmeleitung in Metallen): $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2 \cdot k_B^2}{3 \cdot e^2} \cdot T$

- σ : elektrische Leitfähigkeit, e: Elementarladung

Wärmestrahlung

Integrales Absorptionsvermögen: $A^* = \frac{\text{absorbierte Strahlungsleistung}}{\text{aufgenommene Strahlungsleistung}}$

- Körper mit $A^* = 1$: „schwarzer Körper“ mit größtem Emissionsvermögen bei gleicher Temperatur im Vergleich zu Körpern mit $A^* < 1$
- $\frac{E^*(T)}{A^*(T)} = K(T)$
(E^* : Emissionsvermögen, K : Konstante, die nur von T abhängt, nicht vom Material)

Kirchhoffsches Gesetz für Hohlraumstrahlung: $\frac{E_\nu^*}{A_\nu^*} = S_\nu^*(T)$

- S_ν^* : Spektrale Strahlungsdichte, A_ν^* , E_ν^* : spektrales Emissions- / Absorptionsvermögen bei der Frequenz ν

Hauptsätze der Thermodynamik

Vorzeichen:

- vom System verrichtete Arbeit (Energie wird kleiner): negativ
- dem System zugeführte Arbeit: positiv

1. Hauptsatz (Energieerhaltung): $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$

- \Leftrightarrow Es gibt kein perpetuum mobile 1. Art
- \Leftrightarrow Ideales Gas: $dU = dQ - p \cdot dV$

(Im Folgenden Prozesse für 1 mol eines Gases, $\nu = \frac{V}{V_{mol}} = 1$)

Isochore Prozesse ($V = const \Rightarrow dV = 0$)

- $dQ = dU = C_V \cdot dT$
- $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$
- $\Delta W = 0$

Isobare Prozesse ($p = const$)

- $dQ = C_p \cdot dT$
- Enthalpie: $H = U + pV$
- $dQ = dH = dU + p \cdot dV$
- $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$

Isotherme Prozesse ($T = const \Rightarrow dU = 0$)

- $dQ = p \cdot dV = -dW$
- $W = -\int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = -R \cdot T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \cdot T \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}$
- $p \cdot V = const$

Adiabatische Prozesse ($dQ = 0$)

- $dU = C_V \cdot dT = -p \cdot dV$
- Poisson'sche Gleichungen / Adiabatengleichungen:
 - $T \cdot V^{\kappa-1} = const$
 - $p \cdot V^\kappa = const$

2. Hauptsatz:

- Wärme fließt von selbst immer nur vom wärmeren zum kälteren Körper, nie umgekehrt
- \Leftrightarrow es gibt kein perpetuum mobile 2. Art

Kreisprozess: System kehrt nach mehreren Zustandsänderungen in den Ausgangszustand zurück

- reversibel: Kreisprozess kann in beide Richtungen durchlaufen werden

Carnot'scher Kreisprozess:

1. isotherme Expansion
2. adiabatische Expansion
3. isotherme Kompression
4. adiabatische Kompression

Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses: $\eta = \frac{\Delta Q}{\Delta Q} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Entropie

Reduzierte Wärmemenge: $\frac{\Delta Q}{T}$

Entropie S: $dS = \frac{dQ_{reversibel}}{T}$

- bei einem reversiblen Kreisprozess bleibt die Entropie konstant
- $\Delta S_{isobar} = C_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$
- $\Delta S_{isochor} = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$
- $\Delta S_{isotherm} = \frac{\Delta Q}{T} = R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$
- $S = k_B \cdot \ln W$ (W : Realisierungsmöglichkeiten des Zustands)
- $S[bit] = - \sum_{i=1}^W p_i \log_2 p_i$ (p_i : Wahrscheinlichkeit, dass Zustand i vorliegt)
- Umrechnung: $S[J/K] = S[bit] \cdot k_B \cdot \ln 2$
- Mischungsentropie: $\Delta S_{mix} = k_B \sum_i N_i \cdot \ln \frac{N}{N_i}$ (N_i : Anzahl Moleküle der zu mischenden Volumina)

Thermodynamische Potenziale

innere Energie $U(S, V)$		$dU \leq T \cdot dS - p \cdot dV$	<i>Erhaltungsgröße bei...</i> adiabatisch-isochor
Enthalpie $H(S, p)$	$H = U + p \cdot dV$	$dH \leq T \cdot dS + V \cdot dp$	adiabatisch-isobar
freie Energie $F(T, V)$	$F = U - T \cdot S$	$dF \leq -S \cdot dT - p \cdot dV$	isotherm-isochor
freie Enthalpie $G(T, p)$	$G = U + p \cdot V - T \cdot S$	$dG \leq -S \cdot dT + V \cdot dp$	isotherm-isobar

- „=“: reversibel, „<“: irreversibel
- $S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$
- $p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$
- $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S$

- $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p$
- Thermodynamische Prozesse verlaufen so, dass thermodynamische Potentiale minimiert werden (im Minimum: Gleichgewichtszustand)
- Die Zunahme der freien Energie eines isothermen Systems ist höchstens gleich der in das System hineingesteckten Arbeit: $dF \leq dW$
- Spontane chemische Reaktion für G abnehmend, also $\Delta G < 0$

3. Hauptsatz:

- Entropie aller reinen kondensierten Stoffe geht für $T \rightarrow 0$ gegen den selben Grenzwert
- $\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0$
- \Leftrightarrow der thermodynamische Gleichgewichtszustand am absoluten Nullpunkt ist ein Zustand maximaler Ordnung, nur eine Realisierungsmöglichkeit $W = 1$
- \Leftrightarrow es ist prinzipiell unmöglich, den absoluten Temperatur-Nullpunkt zu erreichen

Reale Gase und Flüssigkeiten

Van-der-Waals-Gleichung eines realen Gases: $\left(p + \frac{a}{V_{mol}^2}\right) \cdot (V_{mol} - b) = R \cdot T$

- a : Stoffkonstante, $b = 4 \cdot N \cdot V_{Atom}$: Kovolumen
- Binnendruck: $p_B = \frac{a}{V^2}$

Clausius-Clapeyron-Gleichung: Verdampfungswärme $W_V = T \cdot \frac{dp_s}{dT} (V_D - V_{fl})$

- V_D : Molvolumen Dampfphase, V_{fl} : Molvolumen flüssige Phase, $\frac{dp_s}{dT}$: Steigung der Dampfdruckkurve $p_s(T)$
- Ursachen:
 - Vergrößerung des Volumens $V_{fl} \rightarrow V_D$ gegen äußeren Druck
 - Vergrößerung des Molekülabstands im Potenzial

Van't Hoffsche Gleichung: $p_s(T) = A \cdot p_0 \cdot e^{-\frac{W_V}{R \cdot T}}$ mit $A = e^{\frac{W_V}{R \cdot T_0}}$

Van-der-Waals-Konstanten: $a = 3 \cdot p_k \cdot V_k^2$, $b = \frac{1}{3} V_k$ ((p_k, V_k) : kritischer Punkt)

Joule-Thomson-Effekt: Abkühlung durch Expansion ohne Verrichtung von Arbeit ist möglich

Inversionstemperatur: $T_I = \frac{2 \cdot a}{b \cdot R}$