Theoretische Physik A - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2004/05, Prof. Schön

Komplexe Zahlen
Komplexe Zahlenebene: $r = |z| = \sqrt{z * z^*}$ $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $\quad z = |z|e^{i\varphi}$

Komlexe Darstellung von Cosinus und Sinus: $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ $\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

Reihenentwicklungen und spezielle Funktionen
Reihenentwicklung $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in geg. Gleichungen ein- bzw. mit geg. Gleichung gleichsetzen, Rekursionsrelation (a_{n+1} abhängig von a_n) bestimmen und aus Wertetabelle Reihe ablesen.

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Taylor-Entwicklung: $f^{(n)}(0) = n!\ a_n \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Dirac'sche δ-Funktion:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)\,\delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & x_0 < x_1 \text{ oder } x_2 < x_0 \end{cases}$$

Eigenschaften: $\delta(0) = \infty, \delta(x \neq 0) = 0, \int_{x_1}^{x_2} dx f(x)\delta'(x) = -f'(0)$

Lorentzfunktion-Darstellung: $\delta_L(x) = \lim_{\alpha\to 0} f_L(x)$ $\quad f_L(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$

Gaussfunktion-Darstellung: $\delta_G(x) = lim_{\alpha\to 0} f_G(x)$ $\quad f_G(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$

Eigenschaften von Gauss- und Lorentzfunktion: $\delta(0) = \infty, \delta(x \neq 0) = 0, \int_{x_1}^{x_2} dx\delta(x) = 1$

Heaviside'sche Θ-Funktion: $\Theta(x - a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{2} & x = a \\ 1 & x > a \end{cases}$ $\quad \frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x)$

Trigonometrische Funktionen

	$0 (0°)$	$\frac{\pi}{6}(30°)$	$\frac{\pi}{4}(45°)$	$\frac{\pi}{3}(60°)$	$\frac{\pi}{2}(90°)$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Additionstheoreme: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

Summen und Differenzen:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}; \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Lösung einer Differentialgleichung durch Separation der Variablen:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \gamma v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{g + \gamma v} = -dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^v dv' \frac{1}{g + \gamma v'} = -\int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma}\ln(g + \gamma v')|_0^v = -t'|_0^t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma}\ln\frac{g + \gamma v}{g} = -t \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\gamma}{g}v = e^{-\gamma t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g}{\gamma}(e^{-\gamma t} - 1)$$

Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\omega_c t)$:

1. Lösung der homogenen DGL $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
   Ansatz: $x(t) = ce^{\lambda t} \quad \dot{x}(t) = c\lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{x}(t) = c\lambda^2 e^{\lambda t} \quad \overset{einsetzen}{\rightarrow} (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)\, c\, e^{\lambda t} = 0$
   $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{=:i\Omega}$
   $\Rightarrow x_h(t) = e^{-\gamma t}(c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t}) = A\, e^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \alpha)$
2. Partikuläre Lösung von $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\omega_c t) = Re\; f e^{i\omega_c t}$:
   Ansatz: $x(t) = \chi e^{i\omega_c t} \quad \dot{x}(t) = i\omega_c \chi e^{i\omega_c t} \quad \ddot{x}(t) = -\omega_c^2 \chi e^{i\omega_c t} \quad \overset{einsetzen}{\rightarrow} \quad \chi e^{i\omega_c t}(-\omega_c^2 + 2i\gamma\omega_c + \omega_0^2) - f e^{i\omega_c t} = 0$
   $\Rightarrow \chi = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega_c^2 + 2i\gamma\omega_c} = \frac{f(\omega_0^2 - \omega_c^2) - 2i\gamma\omega_c f}{\left(\omega_0^2 - \omega_c^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_c^2} \quad \Rightarrow |\chi| = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_c^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_c^2}} \quad \tan\varphi = \frac{Im\chi}{Re\chi} = \frac{2\gamma\omega_c}{\omega_0^2 - \omega_c^2}$
   $\Rightarrow x_p(t) = |\chi| e^{i(\omega_c t + \varphi)}$
3. Allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\, e^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \alpha) + |\chi| e^{i(\omega_c t + \varphi)}$

Fourier-Reihe (immer über ganze Periode integrieren!) $[\omega = \frac{2\pi}{T}]$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)] \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T dt f(t)\cos(\omega n t) \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T dt f(t)\sin(\omega n t)$$

Fourier-Integrale:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-i\omega n t} \qquad k := n\omega$$

Fourier-Transformation:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\tilde{f}(k)\, e^{ikt} \qquad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\; f(t)\, e^{-ikt}$$

DGL transformieren: $\frac{d}{dt} \rightarrow i\omega \qquad \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow -\omega^2$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = f(t) \qquad \rightarrow \qquad (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2)\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$$

Beispiele von Fourier-Transformierten:

- $f(x) = e^{iqx} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(k) = 2\pi\delta(q-k)$
- $f(x) = \cos(qx) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(k) = \pi[\delta(q-k) + \delta(q+k)]$
- $f(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(\omega) = 1$
- $f(t) = \Theta(t)e^{-\gamma t}\sin(\Omega t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{\Omega}{(\Omega^2 + \gamma^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega}$
- Parsevalsche Formel: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}|\tilde{f}(k)|^2$

Faltung
Faltung: $f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') f_2(x - x')$

Faltungstheorem: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\; \tilde{f}_1(k)\; \tilde{f}_2(k)\; e^{ikt} = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; f_1(t')\; f_2(t - t')$

Fouriertransformierte eines Produkts: $g(x) := f_1(x) f_2(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\tilde{f}_1(k) * \tilde{f}_2(k)$

Fouriertransformierte einer Faltung: $g(x) := f_1(x) * f_2(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}(k) = \tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k)$

Lösung einer Differentialgleichung mit der Green'schen Funktion
(Differentialoperator $D_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dt^n} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2$ beim harmonischen Oszillator).

1. Finde die Green'sche Funktion $G(t)$, für die gilt: $D_t\; G(t - t') = \delta(t - t')$
2. Die partikuläre Lösung von $D_t\; x(t) = f(t)$ errechnet sich dann durch $x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; G(t - t')\; f(t')$

Zylinderkoordinaten
Transformation: $(x, y, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$

Einheitsvektoren: $\hat{e}_\rho = \hat{e}_x\cos\phi + \hat{e}_y\sin\phi \qquad \hat{e}_\phi = -\hat{e}_x\sin\phi + \hat{e}_y\cos\phi \qquad \hat{e}_z = \hat{e}_z$

$\hat{e}_\rho\hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi\hat{e}_\phi = \hat{e}_z\hat{e}_z = 1 \qquad \hat{e}_\rho\hat{e}_\phi = \hat{e}_\phi\hat{e}_z = \hat{e}_z\hat{e}_\rho = 0 \qquad \frac{d}{dt}\hat{e}_\rho = \dot{\hat{e}}_\rho = \hat{e}_\phi\dot{\phi} \qquad \frac{d}{dt}\hat{e}_\phi = \dot{\hat{e}}_\phi = -\hat{e}_\rho\dot{\phi} \qquad \frac{d}{dt}\hat{e}_z = 0$

Integration über einen kreisförmigen Weg: $d\vec{r} = \hat{e}_\phi\rho d\phi$

Volumenelement: $dV = \rho \cdot d\rho\ d\phi\ dz$

Polarkoordinaten
Transformation: $(x, y, z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$

Einheitsvektoren: $\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x\cos\phi\sin\theta + \hat{e}_y\sin\phi\sin\theta + \hat{e}_z\cos\theta \\ -\hat{e}_x\sin\phi + \hat{e}_y\cos\phi \\ \hat{e}_x\cos\phi\cos\theta + \hat{e}_y\sin\phi\cos\theta - \hat{e}_z\sin\theta \end{pmatrix}$

$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\phi}\hat{e}_\phi\sin\theta + \dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad \dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi}\hat{e}_r\sin\theta - \cos\theta\dot{\phi}\hat{e}_\theta \qquad \dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\phi}\hat{e}_\phi\cos\theta - \dot{\theta}\hat{e}_r$

Volumenelement: $dV = r^2\sin\theta\ dr\ d\phi\ d\theta$

Energie
Kinetische Energie: $T = E_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$

Potentielle Energie: $U(\vec{r}) - U(\vec{r_0}) = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r}'\vec{F}(\vec{r}') \qquad$ ($\vec{r_0}$: Referenzpunkt)

Kraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -grad\ U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \qquad \vec{F} = \vec{F}_{konservativ} + \vec{F}_{dissipativ}$

Stokes'scher Satz: $\int\int d\vec{s}\ rot\ F = \oint d\vec{r}\ \vec{F}(\vec{r}) \qquad$ ($d\vec{s}$: infinitesimale Flächenelemente)

Stokes'sches Theorem: $\int d\vec{r}\ \vec{F} = \int dA\hat{e}_z(\vec{\nabla}\times\vec{F})$

Integration der Bewegungsgleichung mittels Energiesatz:

$$m\ddot{x} = F(x) \qquad F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = const \text{ (Energieerhaltung)}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} = \frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{2}{m}}dt = \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{2}{m}}\int_{t_0}^{t} dt' = \int_{x_0}^{x} dx'\frac{1}{\sqrt{E - U(x')}}$$

Potentielle Energie: $U(\vec{r}_1...\vec{r}_N) = U^{(ext)}(\vec{r}_1...\vec{r}_N) + U^{(WW)}(\vec{r}_1...\vec{r}_N)$

- Äußere Kräfte: $U^{(ext)}(\vec{r}_1...\vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} U_i^{(ext)}(\vec{r}_i)$
- Wechselwirkungen: $U^{(WW)}(\vec{r}_1...\vec{r}_N) = \sum_{i=1,j>i}^{N} U_{ij}^{(WW)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$

Galilei-Transformationen
Bezugssysteme bewegen sich relativ zueinander mit $\vec{d}(t) = \vec{d}_0 + \vec{v}_0 t$

- $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{d}(t)$
- $x_i = x_i' + d_{0i} + v_{0i}t$
- $x_i' = x_i - d_{0i} - v_{0i}t \qquad$ Allgemein: $x_i' = \sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}x_j \qquad x_i'(t') = \sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}x_j - d_{0j} - v_{0i}t$
- $t' = t - t_0$
- $\vec{v} = \vec{v}' + v_0$
- $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$

Schwerpunkt
Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$

Gesamtimpuls: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$

Kraft: $\vec{F}_i = \dot{\vec{P}}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1,j>i}^{N} \vec{F}_{ij}^{(ww)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ $\quad \vec{F}_{ij}^{(ww)} = -\vec{F}_{ji}^{(ww)} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ext)}$

Reduzierte Masse: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$\mu\ddot{\vec{r}} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ $\quad$ ($\vec{r}$: Abstandsvektor der Relativbewegung, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, r = |\vec{r}|$, z.B. $f(r) = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$)
$\rightarrow$ 2-Körper-Problem ohne äußere Kräfte läßt sich reduzieren auf ein 1-Körper-Problem im Abstand r mit der reduzierten Masse μ und trivialer Schwerpunktsbewegung.

Effektives Potential: $U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)$

Drehimpuls
Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad L_z = m\rho^2\dot{\phi} \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

Drehmoment: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{L} \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Für Zentralkräfte (Richtung $\hat{e}_\rho$) gilt: $\vec{L} = const$

Zentrifugalkraft: $F_{Zf} = \frac{L_Z^2}{m\rho^3} = m\rho\dot{\phi}^2$

Kepler'sche Gesetze

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen
2. Der Fahrstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Umlaufzeit T und große Halbachse a erfüllen: $T^2 \propto a^3$

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad$ (a, b: Halbachsen)

Integrale

- $\int dx \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (|x| < a)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - z} = \begin{cases} 0 & Im\, z \cdot t < 0 \\ e^{izt} & Im\, z \cdot t > 0 \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ikx} = 2\pi\delta(k)$
- $\int_0^x dx' \frac{1}{\sqrt{x'^2+1}} = arcsinh(x)$