Theoretische Physik B - Formelsammlung

von Julian Merkert, Sommersemester 2005, Prof. Schön

Lagrange-Gleichungen 1. Art

1. Zwangsbedingungen (Anzahl: s) aufstellen: $F_\alpha(\vec{r},t) = 0 \qquad \alpha = 1...s$
   z.B. Doppelpendel: $F_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0,\ F_2 : (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0$
2. Jeder Zwangsbedingung $F_\alpha(\vec{r},t) = 0$ entspricht eine Zwangskraft $\vec{z} = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha(t)\nabla F_\alpha(\vec{r},t)$
   Zwangskräfte stehen $\perp$ zur Bewegung
   z.B. $z_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}\right)\left\{\lambda_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2) + \lambda_2\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2\right]\right\}$
   $z_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left\{\lambda_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2) + \lambda_2\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2\right]\right\}$
3. Die Lagrange-Gleichungen 1. Art ergeben sich aus $\dot{\vec{p}} = -\nabla U(\vec{r},t) + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha(t)\nabla F_\alpha(\vec{r},t)$ + die Zwangsbedingungen

   (I) $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$ aus F_1
   (II) $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0$ aus F_2
   (III) $m_1\ddot{x}_1 = 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2(x_2 - x_1)(-1)$
   (IV) $m_1\ddot{y}_1 = 2\lambda_1 y_1 + 2\lambda_2(y_2 - y_1)(-1)$
   (V) $m_1\ddot{z}_1 = 2\lambda_1 z_1 + 2\lambda_2(z_2 - z_1)(-1) - m_1 g$
   (VI) $m_2\ddot{x}_2 = 2\lambda(x_2 - x_1)$
   (VII) $m_2\ddot{y}_2 = 2\lambda(y_2 - y_1)$
   (VIII) $m_2\ddot{z}_2 = 2\lambda(z_2 - z_1) - m_2 g$
4. Geeignete Koordinaten wählen, so dass einige Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind
5. Bewegungsgleichungen (DGL) finden:
   - Koordinaten einsetzen (evtl. vorher ableiten)
   - Zwangskräfte λ_i eliminieren
   - Für kleine Winkel approximieren: $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1, \theta^2 \approx 0$
6. DGL lösen (durch Integrieren, Ansatz o.ä.)
7. Die Zwangskräfte ergeben sich am Ende durch Auflösen der Lagrange-Gleichungen nach λ

Lagrange-Gleichungen 2. Art

1. f verallgemeinerte Koordinaten $\vec{q} = (q_1, ..., q_f)$ einführen, so dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind. (f: Anzahl der Freiheitsgrade $= 3N - R$, N Massenpunkte, R Zwangsbedingungen)
   z.B. Pendel mit bewegter Aufhängung: $\vec{q} = (\theta, x_1),\ \vec{r}_1 = (x_1, 0, 0),\ \vec{r}_2 = (x_1 + l\sin\theta, 0, -l\cos\theta)$
2. Berechne kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{r}}_n^2 \qquad$ (für $\vec{r} = (x,y)$ gilt: $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = x^2 + y^2$)
   z.B. $T = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2$
3. Berechne potentielle Energie U
   z.B. $U = m_2 g z_2 = -m_2 g l\cos\theta$
4. Lagrange-Funktion $L = T - U$
5. Lagrange-Gleichungen 2. Art: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$
   z.B. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$
6. Gleichsetzen der Lagrange-Gleichungen 2. Art liefert Bewegungsgleichung.

Totale zeitliche Ableitung von vektorwertigen Variablen

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \left(\dot{\vec{r}}\nabla\right)\vec{A} \qquad \left(\dot{\vec{r}}\nabla = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Kreuzprodukt

- $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y}(\vec{x} \cdot \vec{z}) - \vec{z}(\vec{x} \cdot \vec{y})$
- $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}$

Erhaltungsgrößen
Energieerhaltung: $\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = const$ oder: Lagrange-Funktion nicht explizit t-abhängig

Verallgemeinerter Impuls: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad k = 1..f$

Zyklische Koordinate q_k: q_k kommt nicht explizit in der Lagrange-Funktion vor: $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow$ Impuls ist erhalten

Impulserhaltung: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ unabhängig von q_k oder: $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r} + \vec{a}, \dot{\vec{r}})$

Drehimpulserhaltung: L invariant unter Drehung um x-Achse $\Rightarrow L_x$ erhalten oder: $\dot{L} = (\dot{r} \times p) + (r \times \dot{p}) = 0$

Drehimpulserhaltung: U hängt hängt nur von $|\vec{r}|$ ab

Noether'sches Theorem: $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} = const$ für Transformation $q_k(t) \to q_k(t, \alpha)$, z.B. $\vec{r}_n \to \vec{r}_n + \alpha \hat{e}$

Erweiterung: $\frac{\partial}{\partial \alpha} L\left(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t\right) = \frac{d}{dt} f(q, \dot{q}, t)$ (rechte Seite: totale zeitliche Ableitung einer Funktion f)

Hamilton-Formalismus

1. Verallgemeinerten Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ nach $\dot{q}_k$ auflösen
2. Hamilton-Funktion: $H(q,p,t) = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$
   - In p_k <u>nicht</u> 1. einsetzen, sondern stehen lassen.
   - H ist am Schluss eine Funktion von q, p und t, ggf. noch vorhandene $\dot{q}_k$ mit 1. eliminieren.
3. Hamilton'sche Gleichungen:
   - $\dot{\vec{p}}_k = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_k}$
   - $\dot{\vec{q}}_k = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_k}$
   - $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$
   - $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$
4. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus $\dot{p}_k = m\ddot{q}_k = ...$ (p_x und p_y rauswerfen, DGL aufstellen)

Poisson-Klammer
Betrachte $A(q,p,t)$

$$\frac{d}{dt} A(q,p,t) = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\{A, H\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

Rechenregeln:

- $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- $\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\}$
- $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\} B$
- $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

Variationsrechnung
Funktional: Abbildung Funktion $\to$ Zahl: $J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$
z.B. $J = J[y] = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$ Wegstrecke zwischen $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2))$

Notwendige Bedingung für lokales Extremum von $y = y(x) : \frac{dy}{dx} = 0$

Euler-Lagrange-Gleichung: $\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} = 0$

Wirkung: $s[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q,\dot{q},t)$

Hamilton'sches Prinzip: Bahnkurve $q(t)$ ist die Bahn, für die die Wirkung extremal wird.

Euler'sche Winkel
Parametrisierung einer Drehung durch $D(\varphi,\theta,\Psi) = D^z(\varphi)D^{x'}(\theta)D^{z''}(\Psi)$, wobei

$$D^z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{x'}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad D^{z''}(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\varphi,\theta,\Psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\Psi - \sin\varphi\sin\Psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\Psi - \sin\varphi\cos\Psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\Psi + \cos\varphi\sin\Psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\Psi + \cos\varphi\cos\Psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\Psi\sin\theta & \cos\Psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Bewegungsgleichung für die Basisvektoren bei Drehung um $\vec{n}$ mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$: $\dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_i(t)$

$\vec{e}_i(t) = \sum_k \vec{n}_k D_{ki}(t)$ mit $D_{ki}(t) = D_{ki}(\varphi(t),\theta(t),\Psi(t))$ euler'sche Winkel, außerdem: $\vec{\Omega} = \sum_j \Omega_j \vec{e}_j$

$\Rightarrow \quad \Omega_1 = \sum_j D_{j3}\dot{D}_{j2} \quad \Omega_2 = \sum_j D_{j1}\dot{D}_{j3} \quad \Omega_3 = \sum_j D_{j2}\dot{D}_{j1}$

$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\Psi + \dot{\theta}\cos\Psi,\ \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\Psi - \dot{\theta}\sin\Psi,\ \Omega_3 = \dot{\Psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$

Drehung um Achsen:

$$D^x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad D^y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad D^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor
$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij}\vec{b}^{(\alpha)^2} - b_i^{(\alpha)}b_j^{(\alpha)}\right]$

- $I_{ij} = I_{ji} \;\Rightarrow$ 6 unabhängige Komponenten
- $I_{ii} > 0$
- Mit Massendichte $\varrho(\vec{r}) = \frac{\Delta M}{\Delta V}$ gilt: $I_{ij} = \int_V d^3b \cdot \varrho(\vec{r}) \cdot [\vec{b}^2\delta_{ij} - b_ib_j]$ $\qquad$ ($d^3b = dV$ Volumenelement)
- $I_{11} = \sum_\alpha m_\alpha(b_2^{(\alpha)^2} + b_3^{(\alpha)^2}) \quad I_{22} = \sum_\alpha m_\alpha(b_1^{(\alpha)^2} + b_3^{(\alpha)^2}) \quad I_{33} = \sum_\alpha m_\alpha(b_1^{(\alpha)^2} + b_2^{(\alpha)^2})$

Steiner'scher Satz: $I'_{ij} = I_{ij} + M[\vec{a}^2\delta_{ij} - a_ia_j]$ $\qquad$ ($\vec{a}$ Abstand)

z.B. Zylinder mit homogener Dichte ϱ:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix},\ d^3b = r\ dr\ d\varphi\ dz \text{ (Zylinder-Koo.)},\ I_{11} = \varrho\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} dr\ r(r^2\sin^2\varphi + z^2)$$

Hauptachsentransformation

1. Eigenwerte des Trägheitsmoments I bestimmen
2. Eigenvektoren ausrechnen, normieren, orthogonalisieren (vgl. LA ONB bestimmen)
3. Die orthonormalen Eigenvektoren bilden die Spalten der Hauptachsentransformation D.
4. Es gilt: $I' = D^TID$ hat Diagonalgestalt

Winkelgeschwindigkeit, Rotationsenergie, Drehimpuls
Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} \rightarrow \dot{\vec{b}} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$

Rotationsenergie: $T_{Rot} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T I\vec{\Omega}$

Transformationen:

- Vektor: $\vec{\Omega}' = D^T\vec{\Omega}$
- Tensor: $I' = D^T I D$
- Skalar: $T'_{Rot} = T_{Rot}$

Drehimpuls: $\vec{L} = I\vec{\Omega}$

Drehmoment: $\vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$

Euler'sche Kreiselgleichungen
$N_1 = I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 \qquad N_2 = I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 \qquad N_3 = I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2$

I_1, I_2, I_3 Hauptträgheitsmomente ($= I_{11}, I_{22}, I_{33}$ für I Diagonalmatrix)

Freie Rotation
Stabil für größtes oder kleinstes I_i, instabil für mittleren Wert.

Gleichförmige Rotation ($\dot{\vec{\Omega}} = 0$) ergibt folgende Kreiselgleichungen:

$$0 = (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 \qquad 0 = (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 \qquad 0 = (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2$$

$\Rightarrow$ 3 Lösungen: $\Omega_1 \neq 0, \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \quad \Omega_2 \neq 0, \Omega_1 = \Omega_3 = 0, ...$

Um die Stabilität der Lösung $\Omega_1 \neq 0, \Omega_2 = \Omega_3 = 0$ zu testen, kleine Abweichungen betrachten:

$$\Omega_1(t) = \Omega_1 + \delta\Omega_1(t) \qquad \Omega_2(t) = \delta\Omega_2(t) \qquad \Omega_3(t) = \delta\Omega_3(t)$$

Quadratisch kleine Terme streichen. $\dot{\Omega}_1 = 0 \Rightarrow$ Bewegungsgleichungen durch Fallunterscheidung, so dass beide Seiten 0 werden.

Kräftefreier symmetrischer Kreisel
Rotationssymmetrie $\Rightarrow I_1 = I_2 \neq I_3$

Euler'sche Kreiselgleichungen: $I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = 0 \qquad I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 = 0 \qquad I_3\dot{\Omega}_3 = 0$

$\Omega_3 = const, \omega := \frac{I_1 - I_3}{I_1}\Omega_3 \;\Rightarrow\; \dot{\Omega}_1 - \omega\Omega_2 = 0 \quad \dot{\Omega}_2 + \omega\Omega_1 = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\Omega}_1 + \omega^2\Omega_1 = 0$

Der schwere symmetrische Kreisel
Mit Steiner'schem Satz und Schwerpunktsvektor $\vec{a}$ gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \qquad I' = \begin{pmatrix} I_1 + a^2M & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + a^2M & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_1 & 0 & 0 \\ 0 & I'_2 & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{pmatrix}$$

Scheinkräfte ($\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{b}(t)$)
Trägheitskraft der Translation: $\vec{K}_{tr} = -m\ddot{\vec{R}}$ (z.B. beschleunigtes Fahrzeug)

Trägheitskraft der Rotation: $\vec{K}_{rot} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{B}$ (z.B. anfahrendes Karusell)

Zentrifugalkraft: $\vec{K}_{Zf} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{b})$

Corioliskraft: $\vec{K}_{Cor} = -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v})$ (auf Nordhalbkugel: Kraft nach rechts)

$m\vec{a} = \vec{K}$ (äußere Kräfte) $+ \vec{K}_{tr} + \vec{K}_{rot} + \vec{K}_{Zf} + \vec{K}_{Cor}$