Theoretische Physik C für das Lehramt - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2006/07, Prof. Busch

Mathematik

Mathematik der Felder
Bezeichnung: Skalares Feld $\phi(\vec{r})$, vektorielles Feld $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z)$

Partielle Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, kurz: $\partial_x, \partial_y, \partial_z$

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$

Laplace-Operator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- $\Delta\phi = \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_z^2\phi$
- $\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 E_x + \partial_y^2 E_x + \partial_z^2 E_x \\ \partial_x^2 E_y + \partial_y^2 E_y + \partial_z^2 E_y \\ \partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z + \partial_z^2 E_z \end{pmatrix}$
- Kugelkoordinaten: $\Delta U(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$

Gradient von ϕ: $\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}$

Divergenz von $\vec{E}$: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$

Rotation von $\vec{E}$: $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$

Rechenregeln:

- $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = 0$
- $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = 0$
- $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \Delta\phi$
- $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$

Totale Ableitung: $\frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t), t) = \partial_x\phi\frac{dx}{dt} + \partial_y\phi\frac{dy}{dt} + \partial_z\phi\frac{dz}{dt} + \partial_t\phi$

Volumenintegral: $I = \int_V d^n x \; f(\vec{x})$

- $\vec{x} = (x_1, ..., x_N)$
- In anderen Koordinaten: $I = \int_V d^n y \;\; |\det J| \;\; f(\vec{x}(\vec{y}))$
- $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_N} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{pmatrix}$

Linien- (Weg-)Integral: $\int_C \vec{F} \; d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ dt

Flächenintegral: $\int_S \vec{F}\ d\vec{A} = \int_D du\ dv\ \vec{F}(\vec{x}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)$

- Tangentialvektoren an Fläche: $\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}(u,v)}{\partial u}$, $\vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}(u,v)}{\partial v}$
- Normalenvektor $\vec{n}(u,v) = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$

Integralsätze:

- Satz von Gauß: $\int_V d^3r\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \oint_{\partial V} \vec{F}\ d\vec{A}$
  - V: Volumen (geschlossen)
  - ∂V: zugehörige Oberfläche
- Satz von Stokes: $\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial S} \vec{F}\ d\vec{s}$
  - S: Fläche (offen)
  - ∂S: zugehöriger Randweg
- 1. Green'scher Satz: $\int_V d^3r \left[f(\vec{r})(\Delta g(\vec{r})) + (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} g(\vec{r}))\right] = \oint_{\partial V} f(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} g(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$
- 2. Green'scher Satz: $\int_V d^3r\, [f(\vec{r})(\Delta g(\vec{r})) - g(\vec{r})(\Delta f(\vec{r}))] = \oint_{\partial V} \left[f(\vec{r})\vec{\nabla} g(\vec{r}) - g(\vec{r})\vec{\nabla} f(\vec{r})\right] d\vec{A}$

Dirac'sche δ-Funktion
δ-Funktion: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) \cdot \delta(x - x_0) = f(x_0)$

- $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\ f(\vec{r}) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = f(\vec{r}_0)$
- $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) \cdot \delta'(x - x_0) = -f'(x_0)$
- $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$, x_i Nullstellen von g
- Darstellungen (jeweils $a \to 0$):
  - $\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$
  - $\delta_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$
  - $\delta_a(x) = \frac{1}{2a} e^{-|\frac{x}{a}|}$
  - $\delta_a(x) = \partial_x \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{a}}}$
  - $\delta_a(x) = \frac{a}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{a}$

Fourier-Transformation
Fourier-Darstellung von $f(x)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \widetilde{f}(k) \cdot e^{ikx}$

Fourier-Transformierte von $f(x)$: $\widetilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) \cdot e^{-ikx}$

Rechenregeln:

- $f'(x) \Leftrightarrow ik \cdot \widetilde{f}(k)$
- $f^{(n)}(x) \Leftrightarrow (ik)^n \cdot \widetilde{f}(k)$
- $f(x - x_0) \Leftrightarrow e^{ikx_0} \cdot \widetilde{f}(k)$
- $\delta(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx_0}$

Elektrodynamik

Maxwell-Gleichungen:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung): $\partial_t \varrho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$

Elektrostatik
Gauß'sches Gesetz: $\oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$

Elektrisches Feld: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

Poisson-Gleichung: $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Laplace-Gleichung: $\Delta\phi = 0$

Superpositionsprinzip: $\varrho(\vec{r}) = a \cdot \varrho_1(\vec{r}) + b \cdot \varrho_2(\vec{r}) \Rightarrow \phi = a \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_2$

Raumladungsdichte einer Punktladung am Ort $\vec{r}'$: $\varrho(\vec{r}) = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

Elektrisches Potenzial einer Punktladung Q am Ort $\vec{r}'$ im freien Raum: $\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} G(\vec{r}, \vec{r}')$

Elektrisches Potenzial einer beliebigen Ladungsverteilung: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \; \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Coulomb-Gesetz:

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$
- $\vec{F} = q\vec{E} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Im Potenzialfeld gilt: $W = q \cdot (\phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}))$

Dirichlet-Randbedingung für eindeutige Lösung:

- Potenzial auf ∂V gegeben
- $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ auf ∂V
- Allgemeine Lösung: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \; G_D(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varrho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\vec{r}) \cdot \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$

Neumann'sche Randbedingung:

- Normalenableitung von ϕ auf ∂V gegeben
- $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} := \frac{-4\pi}{|\partial V|}$ auf ∂V
- Allgemeine Lösung: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \; G_N(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varrho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} \cdot G_N(\vec{r}, \vec{r}') \; dA' + \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} dA' \; \phi(\vec{r}')$

Oberflächenladungsdichte: $\sigma(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}$

Green'sche Funktion: $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') +$ Randbedingungen

- $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$
- $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')$ [Δ' = Differenziere nach $\vec{r}'$]
- $G(\vec{r}, \vec{r}') = \underbrace{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{Lsg.\ fuer\ freien\ Raum} + \underbrace{F(\vec{r}, \vec{r}')}_{fuer\ andere\ Randbed.}$ mit $\Delta F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ in V $\Leftrightarrow \Delta' F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ in V

- Green'sche Funktion $\cong$ Potential einer Punktladung

Potenzielle Energie: $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$

- Punktladung: $W_j = q_j \cdot \phi(\vec{r}_j)$
- Kontinuierliche Ladungsverteilung: $W = \int d^3r \ \frac{\varepsilon_0}{2} \left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2$
- Energiedichte: $U(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2$

Kapazität: $q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\phi_j$

- C_{ij}: Kapazitätsmatrix
- für $N = 1: \ q = C \cdot \phi, \ W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \phi^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$

Multipolentwicklung:

- Monopolmoment: $Q = \int d^3r' \ \varrho(\vec{r}')$
- Dipolmoment: $\vec{p} = \int d^3r' \ \vec{r}' \cdot \varrho(\vec{r}')$
- Quattropolmoment: $Q_{i,j} = \int d^3r' \left[3 \cdot r'_i r'_j - |\vec{r}'|^2 \delta_{ij}\right] \cdot \varrho(\vec{r}')$
- $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{3} Q_{i,j} \frac{r_i r_j}{|\vec{r}|^5} + ...\right]$

Magnetostatik
Statik $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Stromdichte in der Magnetostatik: $\vec{j} = \vec{v} \cdot \varrho(\vec{r})$

Vektorpotenzial und Eichfreiheit: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

- Eichfreiheit Λ: gleiches Ergebnis für $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\vec{\Lambda}(\vec{r})$ mit $\vec{\nabla} \times \vec{\Lambda} = 0$

Coulomb-Eichung: $\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

- im freien Raum: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Gesetz von Biot-Savard: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Magnetisches Dipolmoment: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \ \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$

Magnetisches Dipolfeld: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3 \cdot \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m} \cdot |\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5}\right]$

Lorentz-Kraft auf Punktladung: $\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r \int d^3r' \ \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times \left(\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Energiedichte im Magnetfeld: $u(\vec{r}) = \frac{\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2}{2\mu_0}$

Elektrodynamik
Faraday'sches Induktionsgesetz: $\oint_{\partial S} \vec{E} \ d\vec{r} = -\partial_t \int_S \vec{B} \ d\vec{A}$

Magnetischer Fluss: $\phi(t) = \int_S \vec{B} \ d\vec{A}$

Elektro-Motorische Kraft: $\mathcal{E} = \oint_{\partial S} \vec{E} \ d\vec{r} = -\partial_t \phi$

Ampère'sches Induktionsgesetz: $\oint_{\partial S} \vec{B} \ d\vec{r} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{j} \ d\vec{A}}_{=I} + \frac{1}{c^2} \partial_t \int_S \vec{E} \ d\vec{A}$

Skalare Wellengleichung: $\Delta U(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 U(\vec{r},t) = 0$

- Lösungsansatz: $U(\vec{r},t) = f(\vec{r}\cdot\hat{n} - c\cdot t)$
- f: beliebige Funktion
- $\hat{n}$: Ausbreitungsrichtung
- c: Ausbreitungsgeschwindigkeit der ebenen Welle
- $\perp\hat{n}$: Wellenfronten

Harmonische ebene Wellen: $f(\vec{r},t) = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz
- $\vec{k}$: Wellenvektor
- $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$: Wellenlänge

Dispersionsrelation: $\omega(\vec{k}) = |\vec{k}|\cdot c$

Phasengeschwindigkeit einer harmonischen Welle: $v_{ph} = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$

Gruppengeschwindigkeit eines Pulses mit Trägerwelle k_0: $v_g = \frac{d\omega}{dk}\big|_{k=k_0}$

- Mit Brechungsindex: $v_g = \frac{c}{n(\omega)+\omega\frac{dn(\omega)}{d\omega}}$

EM-Wellen sind Transversalwellen, d.h. $\vec{k}\perp\vec{E},\ \vec{k}\perp\vec{B}$

Allgemeiner Fall der Polarisation: $\vec{E}(\vec{r},t) = (\hat{e}_1E_1 + \hat{e}_2E_2)\cdot e^{i(\vec{n}\vec{r}-\omega t)}$

- $\hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{k}$
- $E_1,\ E_2\in\mathbb{C}$: Amplituden
- $E_1,\ E_2$ gleiche Phase ($E_1,\ E_2\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ lineare Polarisation
- $E_1,\ E_2$ nicht die gleiche Phase $\Rightarrow$ elliptische Polarisation
- $|E_1| = |E_2|$ und um 90° phasenverschoben $\Rightarrow$ zirkulare Polarisation
  - rechts zirkular: $\hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)$
  - links zirkular: $\hat{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)$

Elektrodynamik der Kontinua

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho$
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$
- $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \partial_t\vec{D}$

Konstituierende Gleichungen:

- $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}(\vec{E},\vec{B}) = \varepsilon_0\underbrace{(1+\chi_e)}_{=:\varepsilon}\vec{E}$
- $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}(\vec{E},\vec{B}) = \mu_0\underbrace{(1+\chi_m)}_{=:\mu}\vec{H}$
- $\vec{P}$: Polarisation, oft $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$
- $\vec{M}$: Magnetisierung, oft $\vec{M} = \mu_0\chi_m\vec{H}$

- χ_e: Dielektrische Suszeptibilität
- χ_m: Magnetische Suszeptibilität

Anschlussbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien:

- $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma$
- $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$
- $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$
- $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$
- σ: Oberflächenladung
- $\vec{K}$: Oberflächenstrom

Relativitätstheorie

Transformationen
Äquivalenzprinzip: In jedem Bezugssystem sind die physikalischen Gesetze (Beziehung zwischen Größen) gleich

Galilei-Transformation: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_s \cdot t,\ t = t'$

- Bewegte Uhren gehen gleich schnell
- Länge eines Stabes unabhängig von $\vec{v}_s$
- Direkte Addition von Geschwindigkeiten

Einstein: Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist diesselbe in allen Inertialsystemen

Lorentz-Transformation:

- Bewegung mit v_s in x-Richtung:
  - $x = \gamma \cdot (x' + \beta \cdot c \cdot t')$
  - $y = y'$
  - $z = z'$
  - $c \cdot t = \gamma \cdot (c \cdot t' + \beta \cdot x')$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit $\beta = \frac{v_s}{c}$: Lorentz-Faktor
- Allgemein:
  - $\vec{r} = \vec{r}' + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \cdot \left(\vec{\beta} \cdot \vec{r}'\right) \cdot \vec{\beta} - \gamma \cdot \vec{\beta} \cdot c \cdot t'$
  - $c \cdot t = \gamma \cdot (c \cdot t' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}')$
- $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}_s}{c},\ \beta = |\vec{\beta}|,\ \gamma = \frac{1}{1-\beta^2}$
- Bewegte Uhren gehen langsamer, Zeitdilatation $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ (K': Ruhesystem der Uhr)
- Bewegte Stäbe sind kürzer, Lorentz-Kontraktion $l = \frac{1}{\gamma} l'$ (K': Ruhesystem des Stabes)
- Addition von Geschwindigkeiten: $v = \frac{v' + v_s}{1 + \frac{v' \cdot v_s}{c^2}},\ v' = \frac{v - v_s}{1 - \frac{v' \cdot v_s}{c^2}}$

Relativistischer Doppler-Effekt: $\omega = \gamma \cdot \omega' \cdot (1 + \beta \cdot \cos\theta')$

- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma \cdot (\cos\theta' + \beta)}$
- $\theta = \sphericalangle(\vec{K}, \vec{v}_s)$
- $\theta' = \sphericalangle(\vec{K}', \vec{v}_s)$

4-Vektoren
4-Vektor: Satz von 4 physikalischen Größen, die unter einer Lorentz-Transformation wie $(ct, \vec{r})$ transformieren

- $a^\mu := (a^0, \vec{a}) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$
- $(a^0)' = \gamma \cdot (a^0 - \beta \cdot a^1)$
- $(a^1)' = \gamma \cdot (a^1 - \beta \cdot a^0)$
- $(a^2)' = a^2$
- $(a^3)' = a^3$
- $a^\mu := (a^0, \vec{a})$ heißt kovarianter 4-Vektor
- $a_\mu := (a^0, -\vec{a})$ heißt kontravarianter 4-Vektor
- Ortsvektor: $x^\mu = (c \cdot t, \vec{x})$

Skalarprodukt: $a \cdot b = a^0 \cdot b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu =: a_\mu b^\mu$ (Einstein'sche Summenkonvention)

- $x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\alpha} x^\alpha = c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 = \tilde{x}^\mu \tilde{x}_\mu$

Differentialoperatoren:

- $\partial_\mu := \left(\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla}\right)$ kontravariant
- $\partial^\mu := \left(\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla}\right)$ kovariant
- $\partial\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$

Lorentz-Transformation: $L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\tilde{x}^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} x^\lambda = L_{\mu\lambda} x^\lambda$

Relativistische Elektrodynamik
Wellengleichungen: $\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{c} j^\nu$

Lorentz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$ mit $A^\mu = (\phi, c \cdot \vec{A})$

Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -c \cdot B_z & c \cdot B_y \\ E_y & c \cdot B_z & 0 & -c \cdot B_x \\ E_z & -c \cdot B_y & c \cdot B_x & 0 \end{pmatrix}$

Dualer Feldstärke-Tensor: $\overline{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 & \frac{1}{c}E_x \\ B_z & \frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix}$

- ε: Levi-Civita-Symbol

Inhomogene Maxwell-Gleichungen: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{c} j^\nu$

Homogene Maxwell-Gleichungen: $\partial_\mu \overline{F}^{\mu\nu} = 0$

Relativistische Kinematik
Relativistischer Impuls: $\vec{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v}$

Energie-Impuls-Relation: $E = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + |\vec{p}|^2 \cdot c^2}$

4er-Impuls: $p^\mu = (\frac{1}{c}E, \vec{p})$

4er-Geschwindigkeit: $v^\mu = \gamma \cdot (c, \vec{v})$

4er Impuls-Geschwindigkeits-Beziehung: $p^\mu = m_0 \cdot v^\mu$

Impuls Photon: $\vec{p} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$

Lichtkegel, Kausalität
$x^\mu = (c \cdot t, \vec{x}),\ x_\mu x^\mu = c^2 \cdot t^2 - |\vec{x}|^2 =: s^2,\ s_{12}^2 = c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$

Lichtartig: $s = 0,\ c = \frac{|\vec{x}|}{t}$

Raumartig: $s_{12}^2 < 0 \quad [c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 < (x_1 - x_2)^2$ in 1D]

- Ereignisse lassen sich <u>nicht</u> durch ein Lichtsignal verbinden
- Kein kausaler Zusammenhang

Zeitartig: $s_{12}^2 > 0 \quad [c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 > (x_1 - x_2)^2$ in 1D]

- Ereignisse lassen sich durch Lichtsignal verbinden
- Kausaler Zusammenhang möglich

Allgemeine Relativitätstheorie
Ideen:

- träge Masse = schwere Masse
- starkes Äquivalenzprinzip:
  - Forderung: Physik in „frei fallenden“ Bezugssystem in einem Gravitationsfeld $\Leftrightarrow$ Physik in einem Inertialsystem ohne Gravitation
  - Physik in einem nicht-beschleunigten Bezugssystem mit Gravitation $\vec{g} \Leftrightarrow$ Physik in einem beschleunigten Bezugssystem mit $\vec{a} = -\vec{g}$

Folgen:

- Gravitation krümmt den Raum (Lichtstrahlen)
  - Gravitationspotential: $\phi(\vec{r}) = -G \cdot \frac{M}{|\vec{r}|}$
  - Brechungsindex: $n(\vec{r}) = 1 - \frac{\phi(\vec{r})}{c^2}$
- Rot-Verschiebung von Licht
  - Doppler-Shift: $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{Doppler} = \frac{\Delta U}{c}$
- Zeitdilatation durch Gravitation: $\frac{d\tau_1 - d\tau_2}{d\tau_2} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}$
  - Für statisches ϕ: $\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta\phi}{c^2}$
  - Uhren im starken Gravitationsfeld gehen schneller

Quantenmechanik

Schrödinger-Gleichung: $i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$

- $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$: Hamilton-Operator
- $\Psi(\vec{r},t)$: quantenmechanische Wellenfunktion
- $V(\vec{r})$: Potential, in dem sich das Teilchen mit Masse m befindet (potentielle Energie), z.B. im elektrischen Potential $\phi(\vec{r}):\ V(\vec{r}) = q\cdot\phi(\vec{r})$

Physikalische Größen in der Quantenmechanik: hermitesche Operatoren
Hermitescher Operator: $\hat{O} = \hat{O}^+$

- $\hat{O}^+$: hermitesch konjugierter Operator, $\int d^3r\ \varphi^*(\hat{O}\Psi) = \int d^3r\ (\hat{O}^+\varphi^*)\Psi\ \forall\ \Psi,\varphi$
- Eigenschaften:
  - reelle Eigenwerte $\hat{O}\varphi = \underbrace{O}_{\in\mathbb{R}}\varphi$
  - Eigenfunktionen φ bilden vollständiges Orthonormalsystem, also „Basis“

Wert $\left\langle\hat{O}\right\rangle$ der physikalischen Größe im Zustand $\Psi(\vec{r},t)$: $\left\langle\hat{O}\right\rangle_\Psi = \int_V d^3r\ \Psi^*(\vec{r},t)\left(\hat{O}\Psi(\vec{r},t)\right) \in \mathbb{R}$

Impuls: $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$

Ort: $\hat{\vec{r}} = \vec{r}\cdot$

Energie: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$

- klassische Mechanik: Hamilton-Funktion $H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightarrow$ Quantenmechanik: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$

Kopenhagener Deutung:
$|\Psi(\vec{r},t)|^2\ d^3r =$ Wahrscheinlichkeit dafür, zur Zeit t am Ort $\vec{r}$ das Teilchen in einem Volumen d^3r zu finden

Normierung: $\int_V d^3r\ |\Psi(\vec{r},t)|^2 = 1$

$\left\langle\hat{O}\right\rangle$ ist das bezüglich Ψ gewichtete Mittel <u>möglicher</u> Messwerte

Mögliche Messwerte sind die reellen Eigenwerte des Hermiteschen Operators $\hat{O}$

Wahrscheinlichkeitsdichte-Operator: $|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \int d^3r\ \Psi^*(\vec{r},t)\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\ \Psi(\vec{r},t)$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte-Operator: $\vec{j}(\vec{r}_0,t) = \int d^3r\ \Psi^*(\vec{r},t)\ \hat{\vec{j}}\ \Psi(\vec{r},t)$

- $\hat{\vec{j}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}\hat{\varrho}_w + \hat{\varrho}_w\hat{\vec{p}}\right)$

Eigenschaften der Schrödinger-Gleichung

- Lineare Differentialgleichung $\Rightarrow$ Superposition möglich, nicht relativistisch
- Stationäre Schrödinger-Gleichung: $\hat{H}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$
  Verfahren zur Bestimmung der Wellenfunktion $\Psi(\vec{r},t)$, falls $\hat{H}$ keine Funktion der Zeit:
  1. $\hat{H}\varphi = E\varphi$ mit Ansatz lösen $\rightarrow$ Satz von Eigenwerten $\{E_1,E_2,...\}$ und Eigenfunktionen $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$
  2. $\Psi(\vec{r},0) = \sum_i \alpha_i\cdot\varphi_i(\vec{r}),\quad \alpha_i\in\mathbb{C}$
     - $\alpha_i = \int d^3r\ \varphi_i^*(\vec{r})\ \Psi(\vec{r},0)$
  3. $\Rightarrow \Psi(\vec{r},t) = \sum_i \alpha_i\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot E_i\cdot t}\cdot\varphi_i(\vec{r})$

  Oder: $\Psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r})\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot E\cdot t}$
- Lösungsansatz: $\varphi(x) = A\cdot e^{ikx} + B\cdot e^{-ikx} \Rightarrow \varphi(x) = A\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m\cdot(E-V)}\cdot x} + B\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m\cdot(E-V)}\cdot x}$

Vertauschungsrelationen, Kommutatoren, Anti-Kommutatoren
Kommutator: $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

- Impuls und Ort: $[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}$
- $[\hat{L},\hat{M}] = -[\hat{M},\hat{L}]$
- $[\hat{L},\hat{L}] = 0$
- $[\hat{L}, a\hat{M}] = a[\hat{L},\hat{M}]$
- $[\hat{L}_1 + \hat{L}_2, \hat{M}] = [\hat{L}_1,\hat{M}] + [\hat{L}_2,\hat{M}]$
- $[\hat{L}_1\hat{L}_2, \hat{M}] = [\hat{L}_1,\hat{M}]\hat{L}_2 + \hat{L}_1[\hat{L}_2,\hat{M}]$
- $\Big[\hat{L}_1,[\hat{L}_2,\hat{L}_3]\Big] + \Big[\hat{L}_2,[\hat{L}_3,\hat{L}_1]\Big] + \Big[\hat{L}_3,[\hat{L}_1,\hat{L}_2]\Big] = 0$

Anti-Kommutator: $\Big\{\hat{A},\hat{B}\Big\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

Einfache Systeme
Freies Teilchen: $i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi$

- Ansatz: $\Psi = A \cdot e^{\pm i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$
- $\Rightarrow \underbrace{\hbar\omega}_{E}\,\Psi = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\frac{\vec{p}^2}{2m}}\Psi$

Harmonischer Oszillator: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\varphi = E\varphi$

- Lösung kompliziert (mit Hermite-Polynomen etc.), deshalb:
- $:\Leftrightarrow \hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n$
  - $E_n = \hbar\cdot\omega\cdot(n+\frac{1}{2}),\ n \in \mathbb{N}_0$
  - $\int d^3r\ \varphi_n^*(\vec{r})\ \varphi_m(\vec{r}) = \delta_{nm}$
  - $\hat{H} = \hbar\cdot\omega\cdot(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$
    * $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\cdot\omega}{2\hbar}}\cdot\hat{x} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2m\cdot\omega\cdot\hbar}}\cdot\hat{p}_x$: Absteiger-Operator
    * $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\cdot\omega}{2\hbar}}\cdot\hat{x} - i\cdot\frac{1}{\sqrt{2m\cdot\omega\cdot\hbar}}\cdot\hat{p}_x$: Aufsteiger-Operator
    * $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\cdot\omega}}\cdot\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)$
    * $\hat{p}_x = \frac{1}{i}\cdot\sqrt{\frac{m\cdot\hbar\cdot\omega}{2}}\cdot\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)$
    * $\hat{a}\varphi_n = \sqrt{n}\cdot\varphi_{n-1},\ \hat{a}\varphi_0 = 0$
    * $\hat{a}^\dagger\varphi_n = \sqrt{n+1}\cdot\varphi_{n+1}$
    * $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$
    * $[\hat{a}^m,\hat{a}^\dagger] = m\cdot a^{m-1},\ [\hat{a},(\hat{a}^\dagger)^m] = m\cdot(\hat{a}^\dagger)^{m-1}$
    * $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a},\ [\hat{n},\hat{a}^m] = -m\cdot a^m,\ [\hat{n},(\hat{a}^\dagger)^m] = m\cdot(\hat{a}^\dagger)^m$

Unschärferelation
Unschärfe einer physikalischen Größe $\hat{O}$ im Zustand $\Psi(\vec{r},t)$: $(\Delta O^2)_\Psi = \int d^3r\ \Psi^*\ \left(\hat{O} - \left\langle\hat{O}\right\rangle_\Psi\right)^2\ \Psi$

- $= 0$ in Eigenzuständen
- Statistische Aussage, hängt vom Zustand des Systems ab

Unschärferelation: $(\Delta Q^2)_\Psi \cdot (\Delta R^2)_\Psi \geq \frac{1}{4}\left|\left\langle[\hat{Q},\hat{R}]\right\rangle_\Psi\right|^2$

- $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
- Statistische Aussage, Unsicherheit ist nicht in der Messung, sondern in der Vorhersage

Teilchen im allgemeinen elektromagnetischen Feld
Hamilton-Operator: $\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\cdot\phi$

Eich-Transformationen:

- $\vec{A} \to \vec{A}' + \nabla\chi$
- $\phi \to \phi' - \partial_t\chi$
- $\Psi \to \Psi' = e^{i\frac{q}{\hbar\cdot c}\chi}$: angepasste Wellenfunktion

Wasserstoffatom
Schrödinger-Gleichung: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]\Psi = E\Psi$

Wellengleichung: $\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)\cdot Y(\theta,\phi)$

- Winkelanteil / Kugelflächenfunktionen: $Y_{l,m} = (-1)^m \cdot \left(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot P_l^{|m|}\cdot(\cos\theta)\cdot e^{i\cdot m\cdot\phi}$
  - $l \in \mathbb{N}$: Drehimpulsquantenzahl
  - $-l \leq m \leq l$: magnetische Quantenzahl
  - $P_l^{|m|}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\cdot\partial_x^{|m|}P_l(x)$: Assoziierte Legendre-Polynome
  - $P_l(x) = \frac{1}{2^l\cdot l!}\cdot\partial_x^l(x^2-1)^l$: Legendre-Polynom
  - Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen:
    * $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \ \sin\theta\ |Y_{l,m}(\theta,\phi)|^2 = 1$
    * $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \ \sin\theta\ Y_{l',m'}^*(\theta,\phi)\ Y_{l,m}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$
  - Beispiele:
    * $Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
    * $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\cos\theta$
    * $Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cdot\sin\theta\cdot e^{\pm i\phi}$
- Radialteil: $R_{n,l}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{n^2\cdot(n+l)!}\cdot\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}}\cdot\varrho^l\cdot e^{-\frac{\varrho}{2}}\cdot L_{n+1}^{2l+1}(\varrho)$
  - $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m\cdot e^2} \approx 0,529\cdot10^{-10}$ m: Bohr'scher Radius
  - $\varrho = \frac{2}{n\cdot a_0}\cdot r$
  - $L_r^s(\varrho) = \partial_\varrho^s L_r(\varrho)$: Assoziierte Laguerre-Polynome
  - $L_r(\varrho) = e^\varrho\cdot\partial_\varrho^r(\varrho^r\cdot e^{-\varrho})$: Laguerre-Polynom
- Zusammengefasst: $\Psi_{n,l,m}(r,\theta\phi) = \left(\frac{4\cdot(n-l-1)!}{(n\cdot a_0)^3\cdot n((n+l)!)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\varrho^l\cdot L_{n+1}^{2l+1}(\varrho)\cdot e^{-\frac{\varrho}{2}}\cdot Y_{l,m}(\theta,phi)$

Energieeigenwert: $E_n = -\frac{R_H}{n^2},\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

- $R_H = \frac{m\cdot e^4}{2\hbar^2\cdot(4\pi\varepsilon_0)^2} \approx 13,605\,\text{eV}$

Spektrallinien: $\Delta E = E_n - E_m = \hbar\cdot\omega$

Drehimpuls und Spin

Drehimpulsoperator: $\hat{\vec{L}} = -\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{r}}$

- $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i \cdot \hbar \cdot L_z$
- $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i \cdot \hbar \cdot L_x$
- $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i \cdot \hbar \cdot L_y$
- $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_y] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$
- $\hat{\vec{L}}^2 = -\hbar^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin\theta} \cdot \partial_\theta \left(\sin\theta \cdot \partial_\theta \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \partial_\phi^2 \right), \quad \hat{\vec{L}}^2 Y_{l,m} = \hbar^2 \cdot l \cdot (l+1) \cdot Y_{l,m}$
- $\hat{L}_z = -i \cdot \hbar \cdot \partial_\phi, \quad \hat{L}_z Y_{l,m} = \hbar \cdot m \cdot Y_{l,m}$

Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms im Magnetfeld: $\hat{H} = \hat{H}_{\text{ohne } \vec{B}} - \frac{e \cdot B}{2m} \cdot \hat{L}_z$

- Aufspaltung: $\Delta E = \mu_B \cdot B \cdot m$
- $\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2 m_e}$: Bohr'sches Magneton

Spin-Quantenzahl: $s = \pm\frac{1}{2}$

Spin-Operator: definiert durch obige Eigenschaften von Drehimpuls-Operatoren

- Darstellung: $\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \hbar \cdot \hat{\vec{\sigma}}, \ \hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$
- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Pauli-Spin-Matrizen
- Eigenzustände zu $\hat{\sigma}_z$: $\Psi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Psi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \hat{S}_z \Psi_{\pm\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2} \cdot \hbar \cdot \Psi_{+\frac{1}{2}}$