Versuch: P1-81

Elektrische Messverfahren

- Vorbereitung -

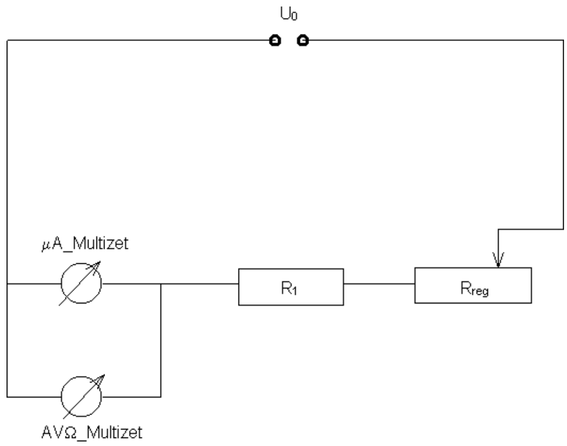
Vorbemerkung
In diesem Versuch geht es um das Kennenlernen verschiedenster Messverfahren für Größen wie Spannung, Strom, Widerstand, Induktivität und Kapazität. Die Auswirkungen des Messverfahrens (durch die verwendeten Geräte etc.) auf die Messwerte soll hierbei beobachtet werden. Ziel ist es, durch die Anwendung der am besten geeigneten Methode Messfehler möglichst zu vermeiden bzw. gegebenfalls zu korrigieren.

Inhaltsverzeichnis

1 Versuche mit Gleichspannung (DC)

1.1 Innenwiderstand I_i^I des μA-Multizets

Das μA-Multizet ist ein Universalmeßgerät der Firma Siemens, dessen Innenwiderstand in diesem Versuch bestimmt werden soll. Hierzu schalten wir das μA-Multizet, einen Widerstand $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ und einen regelbaren Widerstand $R_{reg} = 10\,\mathrm{k\Omega}$ in folgender Weise (Ausgangsspannung $U_0 = 6V$):



Vorgehensweise bei der Messung:

- Zunächst die Schaltung ohne Spannungsmeßgerät (in diesem Fall $AV\Omega$-Multizet im 0,3V-Bereich) aufbauen
- Mit dem regelbaren Widerstand R_{reg} einen Strom von 1 mA einstellen
- Dann das $AV\Omega$-Multizet anschließen und die Spannung messen

Nach dem Ohm'schen Gesetz errechnet sich der gesuchte Innenwiderstand R_i^I des Universalmeßgeräts zu

$$R_i^I = \frac{U}{I} \tag{1}$$

1.2 Berechnung des Innenwiderstands R_i^U des $AV\Omega$-Multizets

In Teilaufgabe 1 kann man annehmen, dass sich der Gesamtstrom nach Zuschaltung des Spannungsmeßgeräts (3.) fast nicht geändert hat. Mit dieser Näherung gilt für den Innenwiderstand des $AV\Omega$-Multizets:

$$R_i^U = \frac{U}{\Delta I} = \frac{U_0}{I_0 - I} \tag{2}$$

da die Differenz zwischen dem vorher eingestellten Strom I_0 und dem nach Zuschaltung des Spannungsmeßgeräts gemessenen Stroms I gerade durch das Strommeßgerät fließen muss. Der Gesamtwiderstand R_{Mess} der beiden Meßgeräte berechnet sich als Parallelschaltung zweier Widerstände mit:

$$\frac{1}{R_{Mess}} = \frac{1}{R_i^I} + \frac{1}{R_i^U} \tag{3}$$

$$\Rightarrow R_{Mess} = \frac{R_i^I \cdot R_i^U}{R_i^I + R_i^U} \tag{4}$$

Der Gesamtwiderstand der Schaltung beträgt also:

$$R_{ges} = R_1 + R_{reg} + R_{Mess} = \frac{U_0}{I} \tag{5}$$

Löst man Gleichung (5) nach I auf, so erhält man folgende Formel, die eine genauere Berechnung des Stromes I ermöglicht:

$$I = \frac{U_0}{R_{ges}} = \frac{U_0}{R_1 + R_{reg} + R_{Mess}} = \frac{U_0}{R_1 + R_{reg} + \frac{R_i^I \cdot R_i^U}{R_i^I + R_i^U}} \tag{6}$$

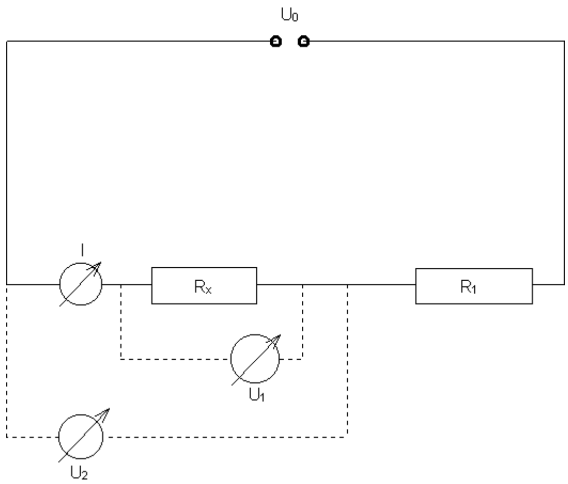
Im Iterationsverfahren kann dieser (bessere) Wert für den Strom I dann wieder oben eingesetzt werden, so dass nach mehr Durchläufen immer genauere Ergebnisse entstehen.

1.3 Bestimmung eines unbekannten Widerstands R_x mittels Strom- und Spannungsmessungen

Ein Widerstand $R_1 = 10\,\mathrm{k}\Omega$ soll in Reihe mit einem unbekannten Widerstand R_x (ca. $470\,\Omega$) und dem Strommessgerät geschaltet werden (Ausgangsspannung $U_0 = 6V$). Nun gibt es zwei Möglichkeiten, das Spannungsmessgerät in die Schaltung einzubauen:

(1) über R_x (spannungsrichtig)

(2) über der Reihenschaltung von R_x und dem Strommessgerät (stromrichtig)



1.3.1 Spannungsrichtige Schaltung

Bei dieser Messanordnung wird exakt die Spannung gemessen, die über R_x abfällt. Das Strommessgerät misst jedoch nicht den Strom, der durch R_x fließt, sondern den Gesamtstrom, der durch die Parallelschaltung von R_x und Spannungsmeßgerät (Innenwiderstand R_U) fließt. Deshalb ergibt sich für den gesuchten Widerstand R_x:

$$I_x = I - I_U \tag{7}$$

$$\Rightarrow R_x = \frac{U}{I_x} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_U}} \tag{8}$$

1.3.2 Stromrichtige Schaltung

Bei dieser Messanordnung wird exakt der Strom gemessen, der durch den Widerstand R_x fließt. Die gemessene Spannung ist jedoch die Spannung über der Reihenschaltung aus R_x und Strommessgerät (Innenwiderstand R_I), und nicht die Spannung über R_x allein. Der gesuchte Widerstand R_x leitet sich diesmal folgendermaßen her:

$$U_x = U - I \cdot R_I \tag{9}$$

$$\Rightarrow R_x = \frac{U_x}{I} = \frac{U}{I} - R_I \tag{10}$$

1.3.3 Zweite Messreihe

Die Messung soll mit vertauschtem μA- und $AV\Omega$-Multizet wiederholt werden. Insgesamt ergeben sich also vier Strom-Spannungs-Wertepaare. Aus diesen soll anschließend der Wert des Widerstandes R_x ermittelt werden - zunächst ohne, dann mit Berücksichtigung der Innenwiderstände der Messgeräte.

1.3.4 Ideale Innenwiderstände von Messgeräten

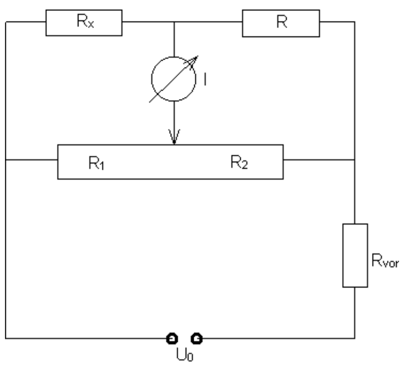
Die Innenwiderstände der Messinstrumente sollten das Ergebnis der Messung natürlich möglichst wenig beeinflussen. Deshalb muss man bei der Herstellung der beiden Typen folgendes beachten:

- **Spannungsmessgeräte** werden parallel geschaltet, weshalb der Innenwiderstand R_i möglichst groß gewählt werden sollte. Dann liegt nämlich der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung Verbraucher / Messgerät
$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_i} \tag{11}$$
nahe am Widerstand R der Ausgangsschaltung. Durch das Spannungsmessgerät fließt in diesem Fall nur ein geringer Strom, fast die gesamte Spannung bleibt über R erhalten.

- **Strommessgeräte** werden in Reihe geschaltet. Um eine minimale Beeinflussung des Stromkreises zu erreichen, sollte der Innenwiderstand R_i möglichst klein gewählt werden - so fällt nur sehr wenig Spannung am Messinstrument ab.

1.4 Wheatstonesche Brückenschaltung

Jetzt soll zur Bestimmung eines unbekannten Widerstands R_x die Wheatstonesche Brückenschaltung verwendet werden. Diese wird aus 3 bekannten Widerständen (davon 1 verstellbarer) und dem zu messenden R_x aufgebaut. In diesem Versuch soll das Potentiometer als Ersatz für zwei Widerstände dienen. Zwischen den Widerständen wird wie folgt als Strommessgerät ein μA-Multizet geschaltet:



Das Potentiometer wird nun so eingestellt, dass durch das Strommessgerät („Brücke") kein Strom mehr fließt. Mit dem bekannten Widerstand $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ und der Potentiometer-Einstellung (Verhältnis $R_1 : R_2$) gilt dann für R_x:
$$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R \tag{12}$$
Vor die Brückenschaltung muss allerdings ein Widerstand $R_{vor} = 220\Omega$ zur Strombegrenzung geschaltet werden!

1.4.1 Vorteil der Wheatstoneschen Brückenschaltung

- Die Wheatstonesche Brückenschaltung erlaubt auch die Verwendung relativ ungenauer Messgeräte, die z.B. einen sehr hohen Innenwiderstand haben. Dies fällt bei dieser Schaltung nicht ins Gewicht, da der Strom sowieso auf Null eingestellt wird.

- Außerdem entfällt aus dem gleichen Grund das Herausrechnen des Innenwiderstands der Messgeräte.

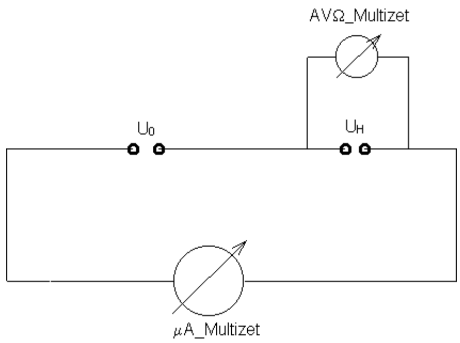
- Des weiteren ist die Berechnung des gesuchten Widerstands R_x unabhängig von der angelegten Spannung (vergleiche hierzu Formel (12)). Schwankende Spannungsquellen und selbst Wechselspannungen können als Ausgangsspannung verwendet werden!

1.5 Widerstandsmessung per Ω-Messbereich des μA-Multizets

Stellt man am μA-Multizet den Messbereich „Ω“ ein, so legt das Gerät automatisch eine bekannte Spannung am zu messenden Widerstand an und registriert den fließenden Strom. Mit dem ohm'schen Gesetz $R = \frac{U}{I}$ kann der Widerstand so direkt berechnet werden. Die Unterschied zwischen linearer und logarithmischer Skalierung ist lediglich in der Darstellungsweise gegeben: auf der logarithmischen Skala kann ein größerer Bereich dargestellt werden.

1.6 Messung der Urspannung U_0 einer Trockenbatterie mittels Kompensationsschaltung

Bei der Kompensationsschaltung wird die zu messende Spannung U_0 der Trockenbatterie in Reihe mit eine Spannung U_H geschaltet. Diese Spannung wird mittels $AV\Omega$-Multizet genau gemessen. Die resultierende Spannung beider Quellen wird mit Hilfe des μA-Multizets gemessen:



Durch Veränderung der Spannung U_H wird die resultierende Spannung auf Null heruntergeregelt. Jetzt sind U_H und U_0 gleich, somit ist die gesuchte Spannung U_0 bekannt. Die Kompensationsschaltung wird angewendet, wenn die Stromquelle einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand hat - also die Spannung bei zunehmendem Stromfluss sinkt.

1.7 Innenwiderstand der Trockenbatterie bei Belastung

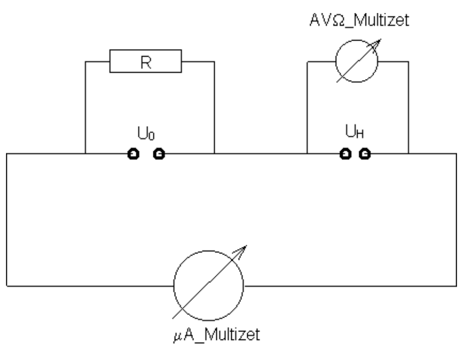
Zunächst wird analog zu Aufgabe 1.6 die resultierende Spannung am μA-Multizet auf Null gestellt. Anschließend wird kurzzeitig ein Lastwiderstand ($R = 220\,\Omega, R = 110\,\Omega, R = 47\,\Omega, R = 22\,\Omega$) zur Batterie parallel geschaltet und die Spannung am μA-Multizet als Differenzspannung ΔU notiert. Es gilt dann:

$$U_0 - \Delta U = R \cdot I \tag{13}$$

$$\Delta U = R_i \cdot I \tag{14}$$

$$\Rightarrow R_i = R \frac{\Delta U}{U_0 - \Delta U} \tag{15}$$

Schaltskizze:



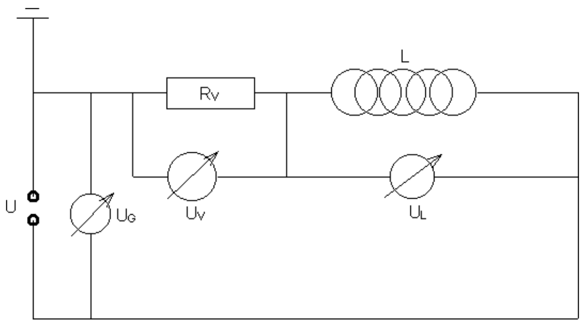
2 Versuche mit Wechselspannung (AC)

2.1 Gleichstromwiderstand einer Spule

Wie in Aufgabe 1.5 messen wir den Widerstand der Spule direkt mit dem μA-Multizet im Ω-Messbereich.

2.2 Induktivität und Verlustwiderstand einer Spule

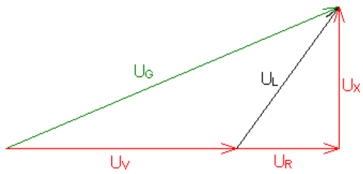
Nachdem wir in 2.1 den Gleichstromwiderstand der Spule bestimmt haben, möchten wir jetzt Messungen bei Wechselstrom ($U = 0,2V, f = 30$ Hz) durchführen. Hierfür schließen wir die Spule mit einem Vorwiderstand $R_V = 110\,\Omega$ an den Sinusgenerator an und messen nacheinander die Spannung am Generator (U_G), am Vorwiderstand (U_V) und an der Spule (U_L).



Zunächst einmal möchte ich festhalten, dass es sich um eine Reihenschaltung handelt, und deshalb der Strom voll am Vorwiderstand abfällt. Das heißt:

$$I = \frac{U_V}{R_V} \tag{16}$$

Die am Generator gemessene Gesamtspannung U_G setzt sich laut dem Zeigerdiagramm folgendermaßen zusammen:

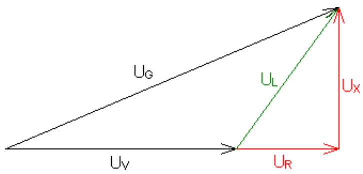


- Die Reihenschaltung des ohm'schen Widerstands der Spule (U_R) mit dem Vorwiderstand (U_V) verläuft wie der Strom
- Dazu um 90° Phasenverschoben ist der induktive Widerstand bzw. die zugehörige Spannung U_X, die wir allerdings nicht messen können.

Nach dem Satz des Pythagoras folgt für die Spannungen:

$$U_G^2 = (U_V + U_R)^2 + U_X^2 \tag{17}$$

Betrachten wir jetzt das kleinere Dreieck im Zeigerdiagramm:



U_L ist die Spannung über der Spule, die wir messen können. Sie setzt sich aus dem Ohm'schen Widerstand R der Spule und dem induktiven Widerstand (mit zugehöriger Spannung U_X) zusammen. Wieder nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$U_L^2 = U_R^2 + U_X^2 \tag{18}$$

Lösen wir (17) und (18) nach U_X^2 auf und setzen die beiden Gleichungen gleich, um U_X zu eliminieren:

$$U_G^2 - U_V^2 - 2 \cdot U_R \cdot U_V - U_R^2 = U_L^2 - U_R^2 \tag{19}$$

(19) $+U_R^2$ liefert:

$$U_G^2 - U_V^2 - 2 \cdot U_R \cdot U_V = U_L^2 \tag{20}$$

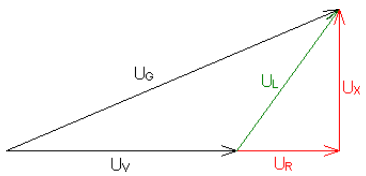
Aufgelöst nach U_R ergibt (20):

$$U_R = \frac{U_G^2 - U_V^2 - U_L^2}{2 \cdot U_V} \tag{21}$$

Dies ist die Spannung, die über dem Ohm'schen Widerstand R der Spule abfällt! Deshalb beträgt der Verlustwiderstand R der Spule nach Formel (21) und (16):

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{\frac{U_G^2 - U_V^2 - U_L^2}{2 \cdot U_V}}{\frac{U_V}{R_V}} = \frac{U_G^2 - U_V^2 - U_L^2}{2 \cdot U_V} \cdot \frac{R_V}{U_V} \tag{22}$$

Zur Bestimmung der Induktivität betrachten wir noch einmal das zweite Zeigerdiagramm:



Zur Erinnerung: U_L ist die Gesamtspannung, die an der Spule abfällt (wird gemessen), U_R ist die Spannung am Ohm'schen Widerstand der Spule und U_X die Spannung, die über dem induktiven Widerstand R_X abfällt. Die Formel für den induktiven Widerstand lautet:

$$R_X = \omega \cdot L \tag{23}$$

$$\Rightarrow L = \frac{R_X}{\omega} = \frac{U_X}{I \cdot \omega} = \frac{U_X}{\omega} \cdot \frac{R_V}{U_V} \tag{24}$$

wobei I mit (16) ersetzt wurde. Unbekannte Größe ist noch das U_X. Aus dem Zeigerdiagramm ist ersichtlich (mit Pythagoras):

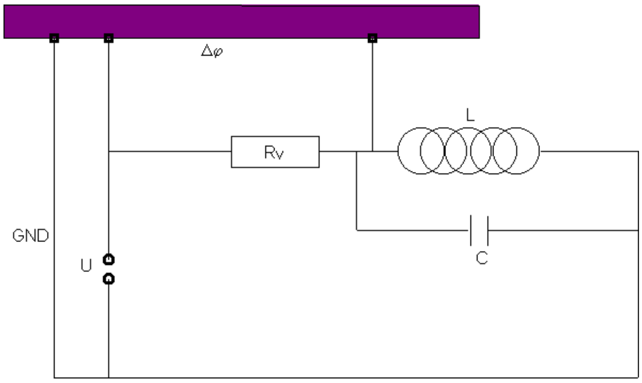
$$U_X = \sqrt{U_L^2 - U_R^2} \tag{25}$$

(25) eingesetzt in (24) ergibt für die Induktivität L:

$$L = \frac{R_V}{U_V \cdot \omega} \cdot \sqrt{U_L^2 - U_R^2} \tag{26}$$

2.3 Messungen im Parallelschwingkreis

Aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule L wird ein Parallelschwingkreis gebaut. Über einen Vorwiderstand $R_V = 1\ M\Omega$ wird der Schwingkreis an den Sinusgenerator angeschlossen. Mit Hilfe der Skizze der Vorbereitungshilfe wird ein Phasendifferenz-Messgerät in die Schaltung eingebaut.

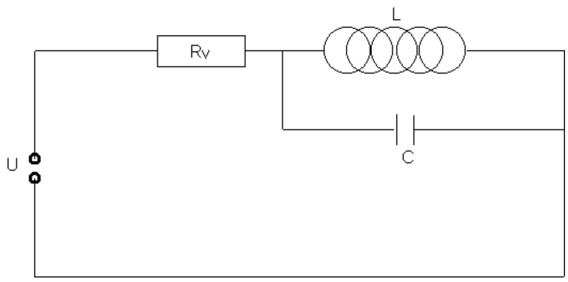


Vorgehensweise bei der Messung:

- Maximale Ausgangsspannung U_0 anlegen und messen
- Messung der Spannung am Resonanzkreis (U_R) und ihre Phasenverschiebung φ gegen den Generatorstrom in Abhängigkeit von der angelegten Frequenz ω. Hierbei soll in Schritten von $20-5$ Hz (je nach Resonanznähe) im Bereich von $100\text{ Hz} \leq \omega \leq 400\text{ Hz}$ gemessen werden.
- Aus den sich daraus ergebenden Schaubildern soll die maximale Frequenz ω_0 und die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ ermittelt werden. Diese Halbwertsbreite ist die Differenz der Frequenzen, bei der die Spannung U_R halb so groß wie im Resonanzfall (U_R^*) ist. Anschließend soll berechnet werden:
  - Resonanzwiderstand: $R_r = U_R^* \cdot \frac{R_V}{U_0}$
  - Schwingkreiswiderstand: $R = \frac{1}{3} R_r \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2$
  - Kapazität: $C = \frac{\sqrt{3}}{\Delta\omega \cdot R_r}$
  - Induktivität: $L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} = \frac{R_r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}$

2.4 Wechselstromwiderstände eines Parallelschwingkreises

An den Schwingkreis wird jetzt die Resonanzfrequenz ω_0 aus Aufgabe 2.3 angelegt. Da in diesem Fall sehr große Ströme entstehen können, wird nicht das Verfahren von Aufgabe 2.2 eingesetzt. Hier werden Strom und Spannung jeweils an den einzelnen Bauteilen gemssen und mit $R = \frac{U}{I}$ ihr elektrischer Widerstand bestimmt.



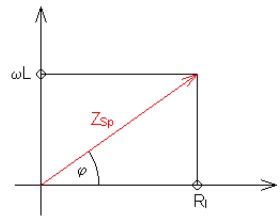
Für den kapazitiven Widerstand gilt:

$$R_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \tag{27}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{R_C \cdot \omega} \tag{28}$$

$$\Rightarrow C = \frac{I_C}{U_C \cdot \omega} \tag{29}$$

Zur Bestimmung der Induktivität ziehen wir wieder das Zeigerdiagramm zu Rate, wobei diesmal der Vorwiderstand nicht betrachtet wird.



Bei unserer Messung erhalten wir den Gesamtwiderstand Z_{Sp} durch die an der Spule gemessenen Größen Spannung U_S und Strom I_S:

$$Z_{Sp} = \frac{U_S}{I_S} \tag{30}$$

Aus dem Zeigerdiagramm ist ersichtlich, dass zwischen Z_{Sp}, Innenwiderstand R_I (=Gleichstromwiderstand) und induktivem Widerstand $R_L = \omega L$ folgende Relation gilt:

$$Z_{Sp}^2 = R_I^2 + \omega^2 L^2 \tag{31}$$

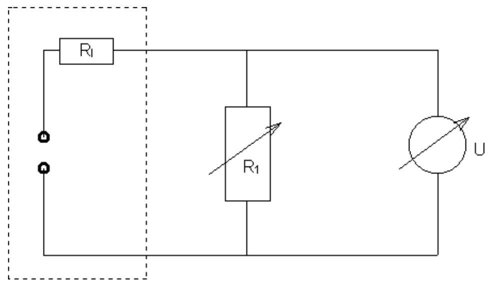
(31) aufgelöst nach L ergibt für die Induktivität:

$$L = \frac{\sqrt{Z_{Sp}^2 - R_I^2}}{\omega} \tag{32}$$

(Bem.: in diesem Fall ist $\omega = \omega_0$ aus 2.3).

2.5 Innenwiderstand des Sinusgenerators

Zunächst bestimmen wir die Leerlaufspannung des Sinusgenerators. Dann wird ein regelbarer Widerstand ($R_1 = 1\ \mathrm{k}\Omega$-Potentiometer) angeschlossen und die Ausgangsspannung auf die halbe Leerlaufspannung heruntergeregelt.



Jetzt gilt:

$$R_I = R_1 \tag{33}$$

Verdoppeln von R_1 liefert den Innenwiderstand des Sinusgenerators. Nach den Kirchhoff'schen Regeln gelten in unserer Schaltung folgende Gesetzmäßigkeiten:

$$I = \frac{U_0}{R_I + R_1} \tag{34}$$

$$U_0 = U_R + U_I \tag{35}$$

$$U_R = R_1 \cdot I \tag{36}$$

Mit $P = U_R \cdot I$ und (34)-(36) gilt nun:

$$P = U_R \cdot I = R_1 \cdot I^2 = R_1 \cdot \frac{U_0^2}{(R_I + R_1)^2} \tag{37}$$

Das Maximum erhält man, in dem man von der Ableitung von $P(R_1)$ eine Nullstelle bestimmt.

$$\frac{\partial P}{\partial R_1} = \frac{U_0^2}{(R_I + R_1)^2} + R_1 \cdot \frac{-2U_0^2}{(R_I + R_1)^3} = U_0^2 \frac{R_I + R_1 - 2R_1}{(R_I + R_1)^3} = U_0^2 \frac{R_I - R_1}{(R_I + R_1)^3} \tag{38}$$

(38) wird gerade für $R_I = R_1$ Null. Die maximale Leistung erhält man, wenn man dies in (37) einsetzt:

$$P_{max} = R_I \cdot \frac{U_0^2}{(2R_I)^2} = \frac{U_0^2}{4R_I} \tag{39}$$