<u>Mo, Gruppe 16</u>
Jens Küchenmeister
Mtknr.: 1253810

GEOMETRISCHE OPTIK

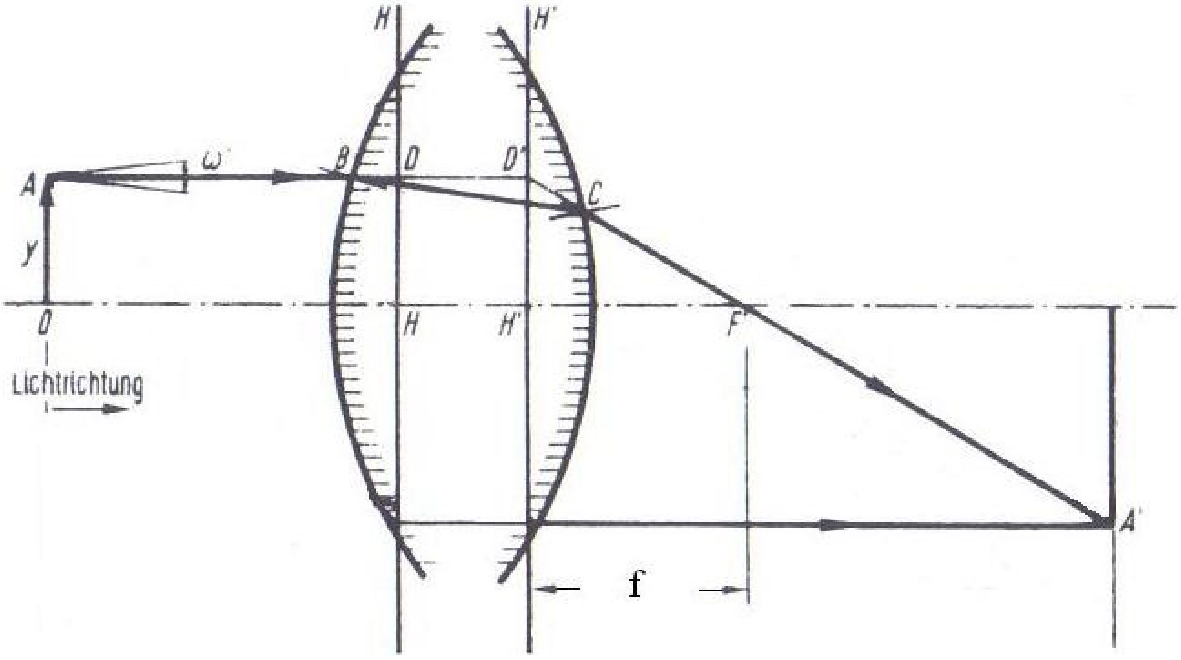
VORBEREITUNG

0.	**Vorbemerkungen ……………………………………….**	**S.2**
1.	**Brennweitenbestimmung……………………………….**	
1.1	**Brennweite mit Lineal…………………………………..**	**S.3/4**
1.2	**Besselverfahren…………………………………………….**	**S.4/5**
1.3	**Abbéverfahren……………………………………………..**	**S.5/6**
2.	**Aufbau optischer Instrumente………………………….**	
2.1	**Keplersches u. Galileisches Fernrohr………………….**	**S.7/8**
2.2	**Diaprojektor………………………………………………..**	**S.9**
2.3	**Mikroskop…………………………………………………..**	**S.10**

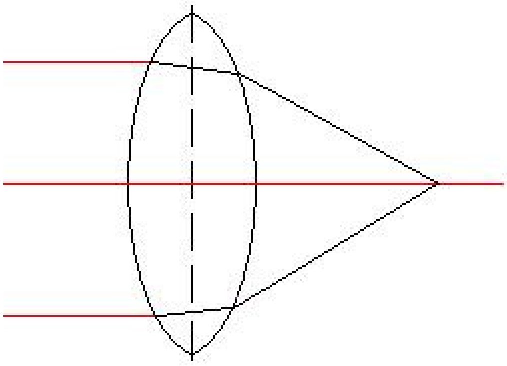
Mo, Gruppe 16
Jens Küchenmeister
Mtknr.: 1253810

Vorbemerkungen:

- Im Folgenden Bild wird der Begriff „Brennweite“ dargestellt:

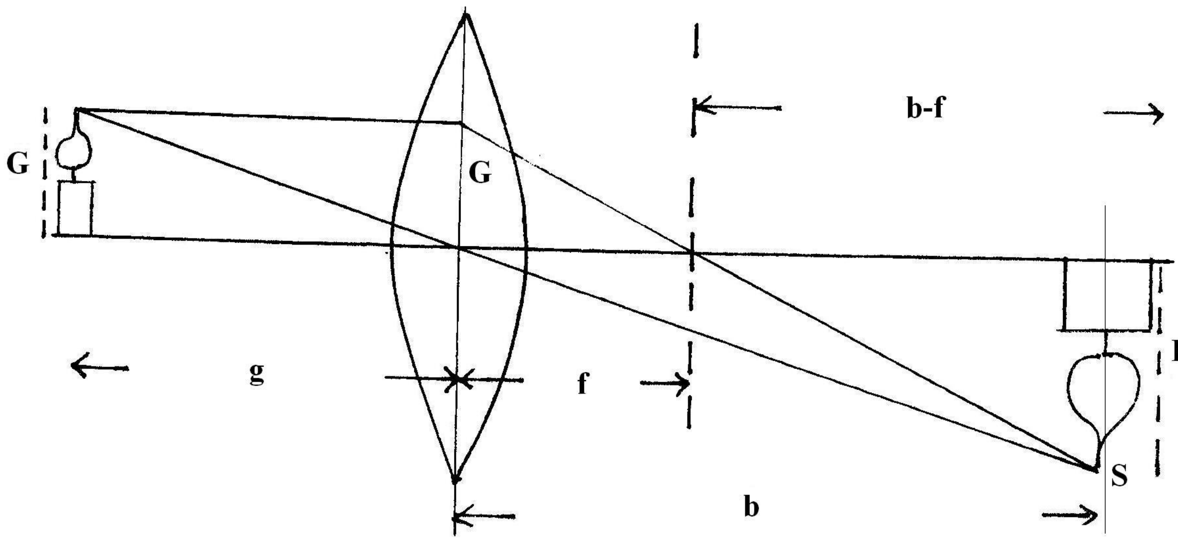


Die Sammellinse wird durch Kugelflächen beschränkt; verbindet man deren Mittelpunkte, so nennt man die Verbindung *optische Achse*.
Nun wird Licht am Punkt A von einem Körper emittiert, der Winkel ω sei klein, so dass die Strahlen als parallel angenommen werden können. Das parallele Strahlenbündel trifft nun auf die Sammellinse und wird zum 1. Mal gebrochen (B) (Brechungsstärke je nach Linseneigenschaft), läuft dann durch die Linse und wird am Punkt C zum 2. Mal gebrochen. Der Schnittpunkt mit der optischen Achse wird als *Brennpunkt* bezeichnet; er ist für alle parallel zur optischen Achse einfallenden Strahlen derselbe (s.Bild unten).
Verlängert man gedanklich die Strecken AB und CF, so schneiden sich beide in einem Punkt. Fällt man nun das Lot auf die optische Achse durch den Schnittpunkt, hat man sich die sogenannte *Hauptebene* (H) konstruiert. Die 2. Hauptebene H' wird analog konstruiert.
Den Abstand zwischen Hauptebene und Brennpunkt bezeichnet man als (bildseitige) *Brennweite f* (objektseitiger Brennpunkt analog).



Parallel einfallende Strahlen treffen sich nach der Brechung in einem Punkt: dem *Brennpunkt*

- Die Linsengleichung



Für eine dünne Linse sei hier die Abbildungssituation dargestellt. Es folgt unmittelbar aus dem Strahlensatz: $\frac{G}{g} = \frac{B}{b}$, sowie $\frac{G}{f} = \frac{B}{b-f}$. Durch umformen gelangt man zu $\frac{g}{b} = \frac{f}{b-f} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-f}{bf} = \frac{1}{g}$ und somit zur *Linsengleichung:* $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.
(Anm.: die rechte Kerze ist natürlich nur symbolhaft dargestellt, sie ist das Bild, daß auf den Schirm S projiziert wird (mit der Höhe B))

1. Brennweiten Bestimmungen:

Aufgabe 1.1

(Kontrollieren Sie nur mit Hilfe eines Maßstabes und eines Schirmes die angegebene Brennweite einer dünnen Sammellinse.)

Zuerst ist festzuhalten, dass die von einem fernen Objekt emittierten Lichtstrahlen idealisiert als parallel eintreffende Strahlen auffassbar sind. Treffen diese Strahlen auf eine Sammel-/Konvexlinse, so werden sie entsprechend der Brechkraft der Linse gebrochen und zwar sowohl beim Eintritt, als auch beim Austritt aus der Linse (s.o.). Ist die Linse nun wie in der Aufgabenstellung dünn, so kann man in der Näherung annehmen, dass die beiden Hauptebenen aufeinanderliegen und zwar in der Mitte der Linse. Somit kann die Brennweite als Abstand zwischen Mittelpunkt der Linse und Brennpunkt angenommen werden.
Nun stellt sich die Frage, wie der Brennpunkt zu finden ist:
am besten eignet sich Sonnenlicht als Lichtquelle, denn die Sonne ist sehr weit von der Linse entfernt und liefert uns die als parallel anzusehenden Strahlen (alternativ: anderes gut gebündeltes Licht). Also sollte die Konstruktion folgendermaßen sein: man montiert die Linse auf eine Schiene, dahinter sollte verschiebbar der Schirm angebracht sein. Nun hält man die Schiene so, dass das Sonnenlicht parallel zur Schiene einfällt, man richtet die Schiene (bzw. die Linse) also auf die Sonne aus. Nun verschiebt man den Schirm auf der Schiene, wobei

man ein kreisförmiges Bild auf dem Schirm beobachten wird, dessen Durchmesser, je nach Abstand zum Brennpunkt, variieren wird. Das Ziel ist die Minimierung des Durchmessers, denn an dem Punkt, an dem der Durchmesser am kleinsten ist (idealisiert ein einziger Lichtpunkt ist), befindet sich der Brennpunkt (Anm.: an diesem Punkt sollte auch die Helligkeit am größten sein). Nun ist der Abstand zwischen Linsenmittelpunkt und Schirm, also die konstruierte Brennweite, mit einem Maßstab zu messen.

Aufgabe 1.2
(Bestimmen Sie mit Hilfe des Besselschen Verfahrens die Brennweite dieser Linse.)

Der Aufbau für das Bessel'sche Verfahren ist ähnlich dem Aufbau aus der Herleitung zur Linsengleichung. Lichtquelle und Schirm werden im Abstand e aufgestellt, wobei man den Abstand der Linse zwischen beiden variieren kann. Man wird feststellen, dass man für genau 2 Positionen der Linse eine scharfes Bild erzeugen wird, was sich folgendermaßen erklärt:

Linsengleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$, wobei (s.o.) g der Abstand von Lichtquelle zur Linse und b der Abstand von Linse zu Schirm ist (f ist dieBrennweite).

Somit erhalten wir: $e = g + b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{e - g}$

Umformung ergibt folglich: $f = \frac{eg - g^2}{e} \quad \Rightarrow \quad g^2 - eg + ef = 0$

Diese quadratische Gleichung lässt sich lösen, d.h. $g_{1/2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} - ef}$

Nun wird auch deutlich, dass man $\frac{e^2}{4} - ef > 0 \quad \Rightarrow \quad e > 4f$ fordern muss, damit der Radikand nicht negativ wird.

Wir haben also 2 Lösungen für eine quadratische Gleichung gefunden, die uns beschreibt , wo sich die Linsen in Abhängigkeit des Abstands Lichtquelle/Schirm und der Brennweite befinden müssen, damit das Bild scharf ist. Die beiden Lösungen werden sich symmetrisch verhalten, d.h., dass der Abstand Lichtquelle/Linse der einen Lösung gleich dem Abstand Linse/Schirm der anderen Lösung sein muss.

Sei nun d der Abstand zwischen den beiden Positionen der Linse, in denen ein scharfes Bild entsteht. Dann gilt: $|d| = |g_1 - g_2| \quad \Rightarrow \quad d = 2 \cdot \sqrt{\frac{e^2}{4} - ef}$

Quadrieren und umstellen ergibt: $\frac{d^2}{4} = \frac{e^2}{4} - ef \quad \Rightarrow \quad f = \frac{e^2 - d^2}{4e}$

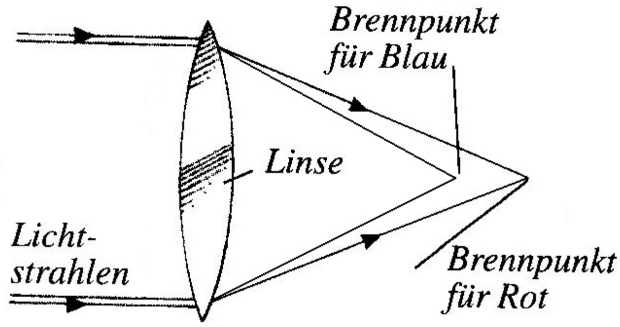
Nun ist es möglich, die Brennweite experimentell zu bestimmen: wir messen beide Stellungen, in denen das Bild scharf ist und können dann aus dem Abstand Lichtquelle/Schirm und dem Abstand der Stellungen die Brennweite errechnen!

Die Wahl von e/f ist deshalb wichtig, da bei zu groß oder zu klein gewähltem e/f die Positionen, an denen das Bild scharf ist (g1, g2, so.), nicht eindeutig erkennbar sind, da die

Lichtintensität zu schwach ist, um einen eindeutigen Punkt festzulegen, an dem gemessen werden soll.

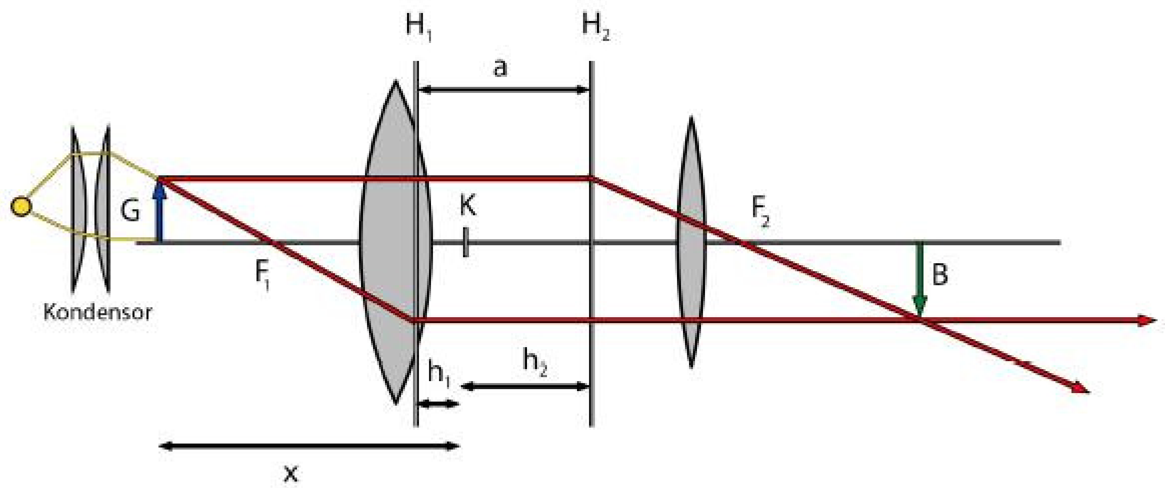
Aberration:

- *chromatische Aberrationen:*
  Die Brechung von Licht in einer Linse oder einem Körper hängt nicht nur von den Eigenschaften der Linse selbst ab, sondern auch von dem einfallenden Licht, denn Licht verschiedener Wellenlängen wird unterschiedlich stark gebrochen (s.Prisma). Aus unterschiedlich starker Brechung folgt auch ein unterschiedlicher Brennpunkt und da das Licht mit dem wir messen nicht nur eine Wellenlänge beinhaltet, sondern ein ganzes Spektrum, verzerrt dieser Effekt die Messungen.



- *sphärische Aberrationen:*
  Hier hat die Tatsache Einfluß, dass die von uns aufgestellte Linsengleichung nur für Strahlen exakt ist, die nah an der optischen Achse liegen. Strahlen, die weiter entfernt sind, werden von der Linse stärker gebrochen und werden somit durch einen Brennpunkt fokussiert, der näher an der Linse ist, als der mit der Linsengleichung errechnete.

Aufgabe 1.3
(Bestimmen Sie mit Hilfe des Abbéschen Verfahrens die Brennweite eines Zweilinsensystems bei zwei verschiedenen Linsenabständen.)



Bei einem Linsensystem kann man die Brennweite nicht einfach aus Gegenstands- und Bildentfernung berechnen, da man dafür von den Hauptebenen des Systems rechnen müsste, die nicht vorweg bekannt sind. Man bestimmt diese mit dem Abbéschen Verfahren. Das Linsensystem befindet sich auf einer optischen Bank. Man bestimmt nun einen Punkt K, der von der Hauptebene H_1 den Abstand h_1, von der Hauptebene H_2 den Abstand h_2 hat. Man misst nun für verschiedene Abstände x_1 des Gegenstandes zum Punkt K, die Vergrößerungen γ_1. Anschließend wird das Linsensystem um 180° um den Punkt K gedreht, d.h. die beiden Hauptebenen vertauschen ihre Lagen. Man misst nun erneut für verschiedene Abstände x_2 die Vergrößerungen γ_2.
Für die Vergrößerung γ gilt:

$$\gamma_1 = \frac{B_1}{G} = \frac{b_1}{g} \text{ und } \gamma_2 = \frac{B_2}{G} = \frac{b_2}{g}$$

Benutzt man nun wieder die Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ erhält man:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b_{1/2}} + \frac{1}{g_{1/2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g_{1/2}} \cdot \left(1 + \frac{g_{1/2}}{b_{1/2}}\right),$$

$$\Rightarrow g_{1/2} = f\left(1 + \frac{1}{\gamma_{1/2}}\right) \text{ und } b_{1/2} = f\left(1 + \gamma_{1/2}\right)$$

Der Hauptebenenabstand beträgt $a = h_1 + h_2$
Der Abstand x des Gegenstandes zum Punkt K ist $x_{1/2} = g_{1/2} + h_{1/2}$
Man erhält also:

$$x_{1/2} = f\left(1 + \frac{1}{\gamma_{1/2}}\right) + h_{1/2}$$

Aus zwei Wertepaaren (x_{11}, γ_{11}) und (x_{12}, γ_{12}) bzw. (x_{21}, γ_{21}) und (x_{22}, γ_{22}) kann man die Brennweite des Systems berechnen:

$$f = \frac{x_{12} - x_{11}}{\frac{1}{\gamma_{12}} - \frac{1}{\gamma_{11}}} \text{ bzw. } f = \frac{x_{22} - x_{21}}{\frac{1}{\gamma_{22}} - \frac{1}{\gamma_{21}}}$$

Mit der Brennweite erhält man auch die Abstände h_1 und h_2 und daraus schließlich den Hauptebenenabstand a.

$$h_{1/2} = x_{1/2} - f\left(1 + \frac{1}{\gamma_{1/2}}\right)$$

$$\Rightarrow a = x_1 - f\left(1 + \frac{1}{\gamma_1}\right) + x_2 - f\left(1 + \frac{1}{\gamma_2}\right)$$

Haben die beiden Linsen des Systems gleiche Brennweiten, so kann man diese berechnen:

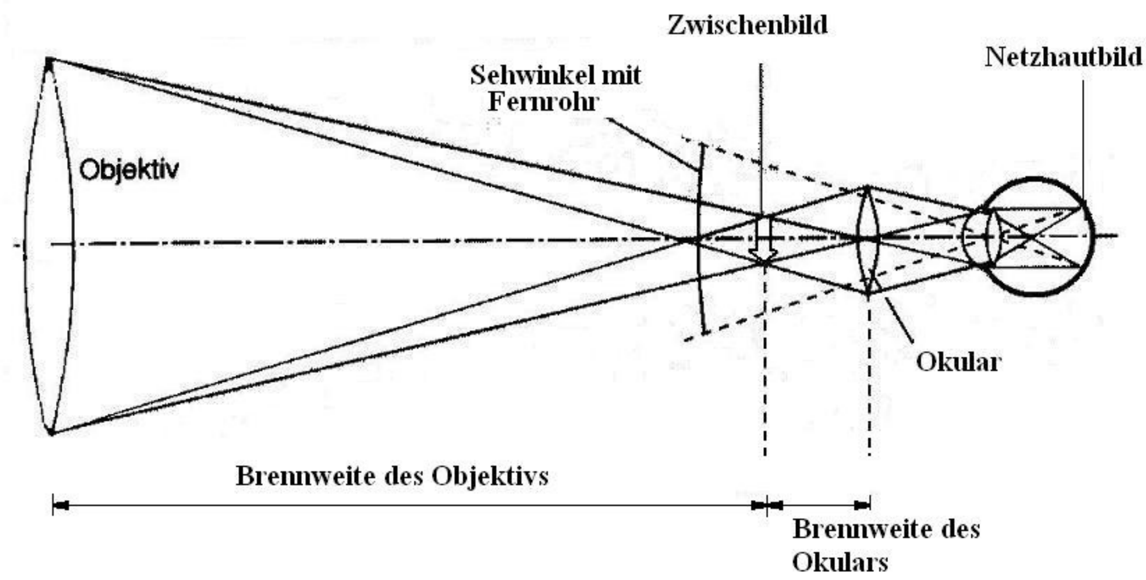
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}$$

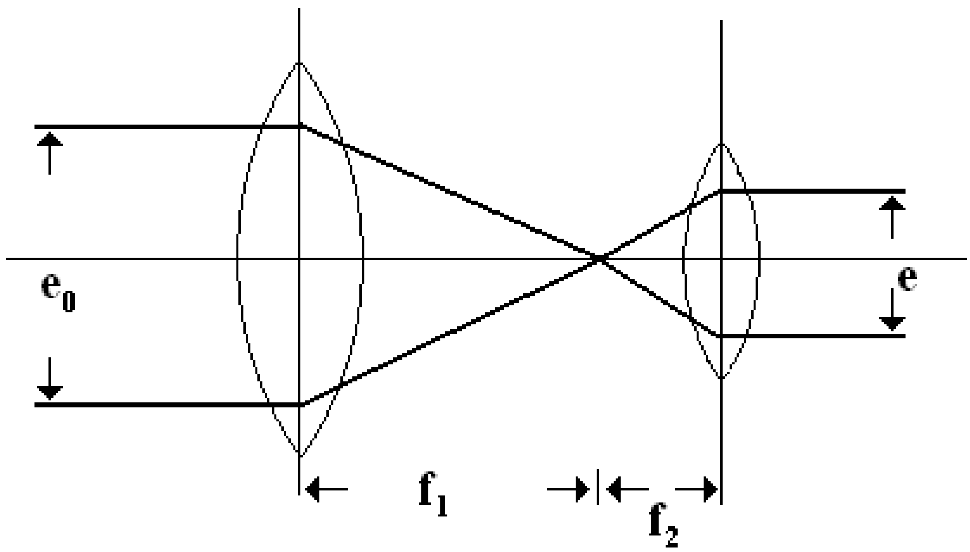
$$\text{mit } f_1 = f_2 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{2}{f_1} - \frac{a}{f_1^2}$$

2. Aufbau optischer Instrumente

Aufgabe 2.1
(Bauen Sie ein Keplersches (astronomisches) Fernrohr mit wenigstens sechsfacher Vergrößerung und betrachten Sie damit entfernte Gegenstände)

- *Das Keplersche Fernrohr* besteht aus 2 Sammellinsen, die folgendermaßen hintereinander angeordnet sind:





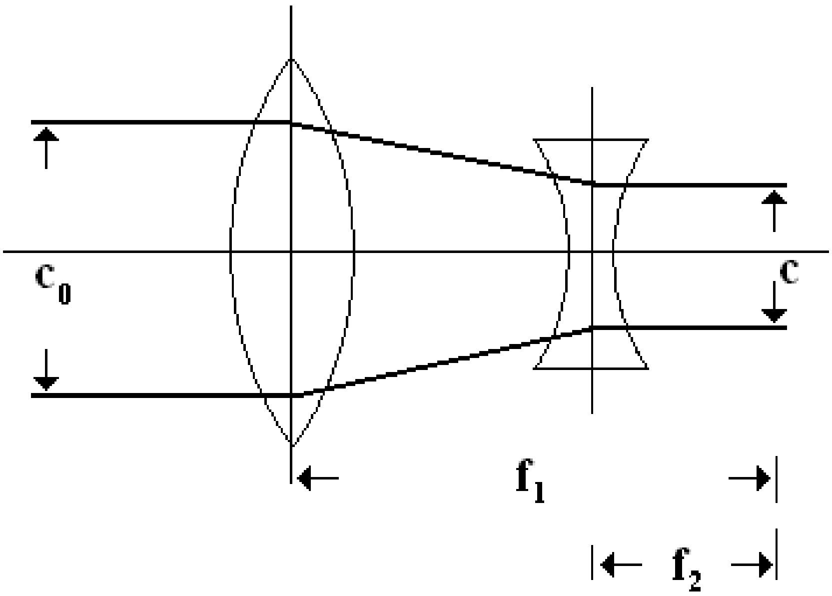
Mit dem astronomischen Fernrohr betrachtet man weit entfernte Objekte nicht mehr direkt, sondern ein reelles Bild von ihnen: dieses Zwischenbild liegt praktisch in der Brennebene des Objektivs und ist stark verkleinert. Das Bild wird mit einer Lupe betrachtet – dem Okular. So läßt sich das Auge bis auf wenige Zentimeter an das Zwischenbild heranbringen. Auf diese Weise werden Sehnwinkel und Netzhautbild vergrößert. Durch ein solches Fernrohr sieht man alles auf dem Kopf stehend und seitenverkehrt, was aber bei seinem ursprünglichen Zweck

der Sternenbeobachtung eher keine Bedeutung hatte. Die Länge des Fernrohrs ergibt sich logischerweise aus der Summe der Brennweiten der beiden Linsen.
Für die Vergrößerung gilt:

$$\gamma = \frac{e_0}{e} = \frac{f_1}{f_2}, \text{ bzw. } \gamma = \frac{Winkel\ des\ Strahls\ ohne\ Fernrohr}{Winkel\ des\ Strahls\ mit\ Fernrohr}$$

Zur Erhöhung der Vergrößerung braucht man also entweder eine größere Brennweite des Objektivs oder eine kleinere Brennweite des Okulars. Somit wird häufig die Länge des Fernrohrs zunehmen, wenn man eine bessere Vergrößerung erreichen möchte.

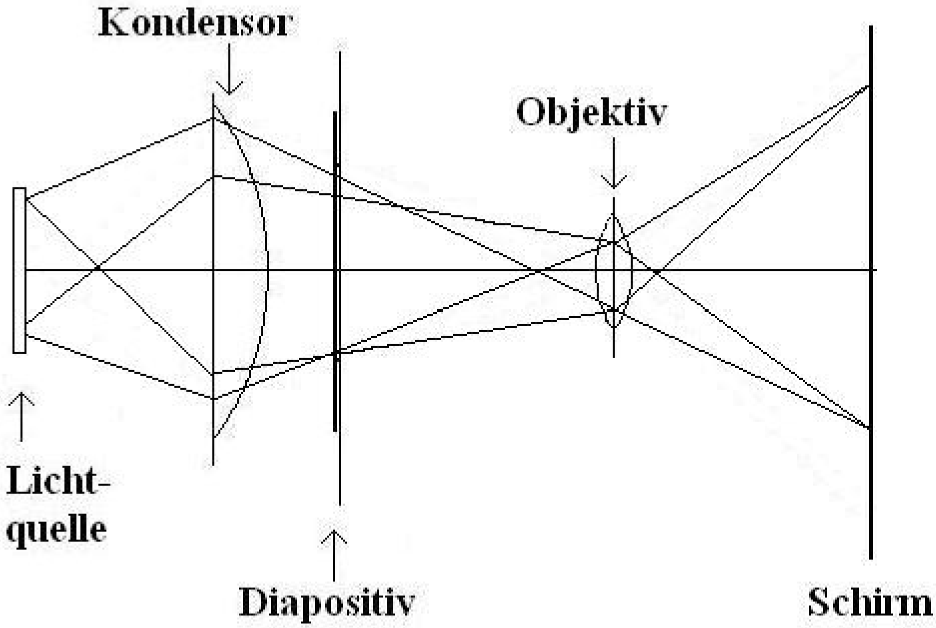
- *Das Galileische Fernrohr* besteht aus einer bikonvexen Linse als Objektiv und einer bikonkaven Linse als Okular:



Diese Konstruktion hat 2 Vorteile: zum einen reduziert sich die Länge des Fernrohrs, da nun gilt $Länge\ L = f_1 - f_2$ (die Formel für die Vergrößerung bleibt aber die gleiche wie bei Kepler). Zum anderen steht das Bild für den Betrachter aufrecht.

Aufgabe 2.2
(Bauen Sie einen Projektionsapparat, der 24mm*36mm Diapositive ausleuchtet und in etwa 1,5m Entfernung etwa zehnfache Vergrößerung aufweist.)

Der Projektionsapparat wird wie folgend aufgebaut:



Vor das Diapositiv wird eine große Linse gesetzt, der Kondensor, mit dem man die Lichtquelle in die Öffnung des Objektivs abbildet, wodurch alles durch das Diapositiv gehende Licht auch durch das Objektiv gehen kann und das Diapositiv in seiner ganzen Ausdehnung auf dem Schirm zu sehen ist. Kurz: der Kondensor ist für die optimale Ausleuchtung des Dias nötig. Das Bild erscheint gedreht und seitenverkehrt, weswegen man Dias immer „auf dem Kopf" und seitenverkehrt in die Halterung einführt.

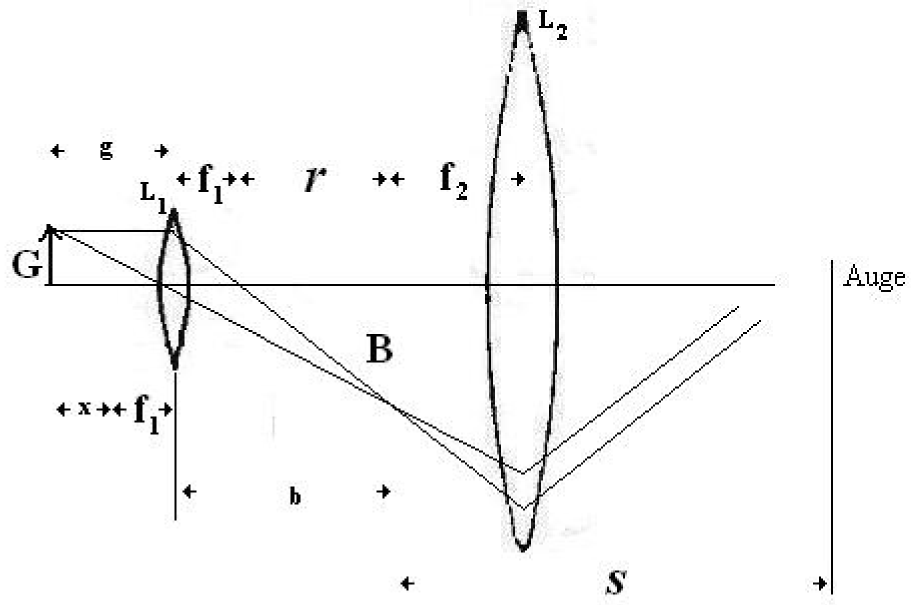
Die Aufgabe ist, ein Dia in 1,5m Entfernung um das 10fache zu vergrößern. Wir können nun die Brennweite der Linse errechnen, die dafür nötig sein wird:

aus der Linsengleichung folgt unmittelbar: $f = \frac{bg}{b+g}$. nach Strahlensatz gilt dann: 10g = b und g + b = 1,5m. Einsetzen ergibt nun: $g \approx 0{,}136m;\ b \approx 1{,}36m$, woraus sich eine Brennweite von $f \approx 0{,}12m$ ergibt.

Mo, Gruppe 16
Jens Küchenmeister
Mtknr.: 1253810

Aufgabe 2.3
(Bauen Sie ein Mikroskop mit >20-facher Vergrößerung und vergleichen Sie die näherungsweise gemessene Vergrößerung mit dem berechneten Wert.

Das Mikroskop besteht im Prinzip aus 2 Sammellinsen. Die erste Linse (Objektiv) entwirft ein reelles Zwischenbild B des Gegenstands G in der Brennebene der zweiten Linse (Okular):



Aufgrund des Strahlensatzes gilt: B/G = b/g

Aus der Linsengleichung ergibt sich: $b = \frac{g \cdot f_1}{g - f_1} = \frac{g \cdot f_1}{x}$

Wird der Gegenstand in die Nähe der Brennebene von L1 gebracht, so dass $g = f_1 + x$ mit $x << f_1$ nur wenig größer ist als f_1, dann wird $b >> g \Rightarrow B >> G$. Das Okular L2 wirkt als Lupe für das Zwischenbild.

Für die Vergrößerung des Mikroskops gilt folgende Formel: $V = \frac{s \cdot r}{f_1 \cdot f_2}$, wobei s die Bildentfernung (des virtuellen Bildes vom Auge) und r die Entfernung der beiden Brennpunkte ist.

Bei der erreichbaren Vergrößerung des Mikroskops sind der Optik Grenzen durch
a) die Wellenlänge des Lichtes gesetzt. Die zu erreichende Abbildungsschärfe liegt in etwa in der Größenordnung der Hälfte der Wellenlänge des sichtbaren Lichts.
b) die „numerische Aperatur". Diese beinhaltet den Öffnungswinkel u der vom Objektiv aufgenommenen Lichtbündel und die Brechzahl n des Stoffes. (n*sin u)

Es gilt für den kleinsten noch erkennbaren Abstand zwischen 2 Dingen:

$$2y_{\min} = \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \sin u}$$