

Versuch: P1-20

Pendel

- *Auswertung (ergänzt)* -

Versuchsdurchführung: Montag, 23.1.2006

Inhaltsverzeichnis

0	Eichmessungen	2
1	Physikalisches Pendel	2
1.1	Reduzierte Pendellänge	3
1.2	Bestimmung der Fallbeschleunigung mittels Reversionspendel	5
2	Fadenpendel	7
2.1	Bestimmung der Fallbeschleunigung bei kleinen Auslenkungen	8
2.2	Abhängigkeit von Schwingungsdauer und Schwingungsweite	9
3	Gekoppelte Oszillatoren	11
3.1	Einstellung zweier gleichartiger Pendel auf gleiche Schwingungsdauern	11
3.2	Gleichphasige und gegenphasige Schwingung	11
3.2.1	Theoretische Berechnung des Trägheitsmoments	12
3.2.2	Statische Bestimmung der Federkonstanten	13
3.2.3	Dynamische Bestimmung der Federkonstanten	13
3.3	Schwebungen	14

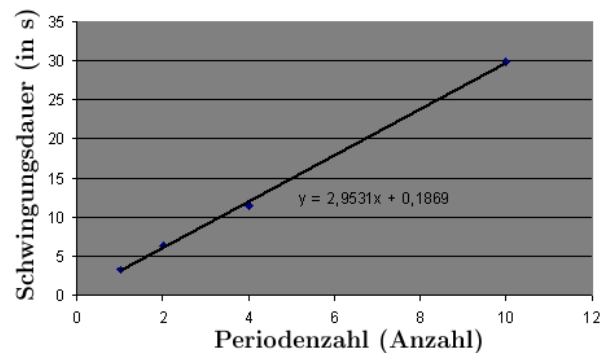
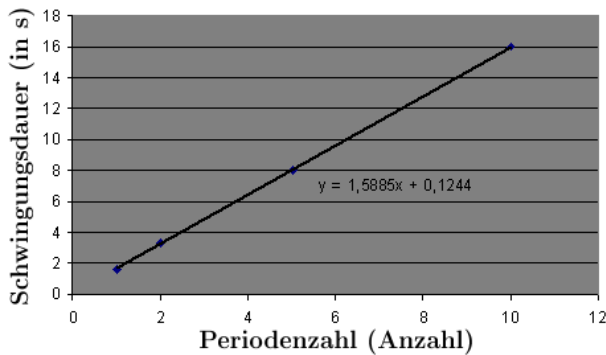
0 Eichmessungen

Die für die Messung der Periodendauer verwendeten Messgeräte haben (wie grundsätzlich jedes Messgerät) eine Abweichung. Diese wollen wir hier ermitteln, da durch verhergegangene Praktikumsversuche bei gleichen Geräten teils sehr unterschiedliche und teils auch sehr große Messfehler entstanden sind. Um dies bei späteren Berechnungen von Periodendauer, Erdbeschleunigung, etc. berücksichtigen zu können, lenkten wir schlicht die Pendel leicht aus, ließen es ein paar Schwingungen vollführen und ermitteln folgende Werte:

Perioden (Anzahl)	1	2	5	10
Dauer (in s)	1,64	3,4	8,04	16,01

Perioden (Anzahl)	1	2	4	10
Dauer (in s)	3,22	6,4	11,47	29,86

Die sich daraus in einem Diagramm „Schwingungsdauer über Periodenzahl“ ergebenden Geraden sollten, wenn das Messgerät 100% genau wäre und somit keine Abweichung produzierte, Ursprungsgeraden sein. Dies ist aber nicht der Fall:



Wir haben nun also einerseits bestätigt, dass wir durch die Geräte einen Messfehler erhalten und haben zweitens auch den Fehler ermittelt: dieser ist nämlich der Y-Achsenabschnitt der Gerade, d.h. jeder gemessene Werte für die Schwingungsdauern ist grundsätzlich ein kleines Stück zu groß, deshalb die Verschiebung der Geraden in Y-Richtung. Wir erhalten also als einzubeziehende Fehlerwerte:

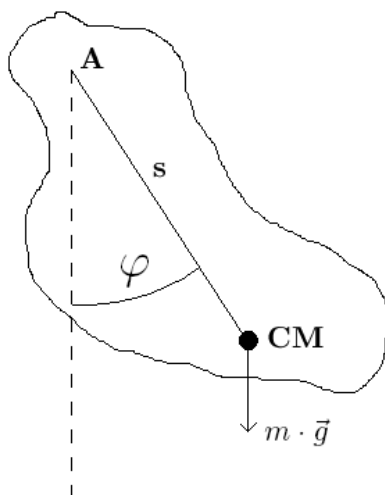
<i>Messfehler</i>	
Aufgabe 1:	0,12 s
Aufgabe 2:	0.19 s

1 Physikalisches Pendel

Am einfachsten lässt sich die Schwingung eines Pendels folgendermaßen beschreiben: man approximiert, dass die Masse des Pendels in einem Massepunkt am Ende vereint ist - diese Anordnung heißt *mathematisches Pendel*. Die Approximation ist in der Realität bei einem Fadenpendel recht gut zutreffend, die Eigenmasse des Fadens ist vernachlässigbar gegenüber der Kugel am Ende. Der Erfolg der Approximation durch das mathematische Pendel geht aber verloren, wenn die Schwingung von einem starren Körper ausgeführt wird, wie beispielweise einer Eisenstange. Dies bezeichnet man als *physikalisches Pendel*. Beide Modelle werden vereint, indem man mit der sog. *reduzierten Pendellänge* l_r rechnet, die der Pendellänge eines mathematischen Pendels mit den gleichen Schwingungseigenschaften des zu betrachtenden physikalischen Pendels entspricht.

1.1 Reduzierte Pendellänge

Eben beschriebene reduzierte Pendellänge soll nun berechnet werden. Dazu betrachten wir ein physikalisches Pendel:



An dem aus seiner Ruhelage herausgedrehten System greift in CM (centre of mass) die Schwerkraft

$$F_S = m \cdot g \quad (1)$$

an, die zu einem rücktreibenden Drehmoment führt, für das gilt:

$$M_r = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

wobei φ der Winkel ist, um den das Pendel ausgelenkt ist und s die Strecke von A zu CM. Bei kleinen Auslenkungen können wir annehmen, dass $\sin \varphi \approx \varphi$ gilt. Damit wird (2) zu:

$$M_r = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi \quad (3)$$

Lässt man das Pendel los, gerät es in eine beschleunigte Drehbewegung um A. Es gilt mit dem Trägheitsmoment J_A des Körpers bzgl der Achse A:

$$M_r = J_A \cdot \ddot{\varphi} \quad (4)$$

Somit ergibt sich aus (3) und (4) die Bewegungsgleichung für das physikalische Pendel:

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi \quad (5)$$

Und damit:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot s}{J_A} \cdot \varphi = 0 \quad (6)$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösung beispielweise lautet:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \beta) \quad (7)$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Dgl ein, so erhält man:

$$-\omega^2 + \frac{m \cdot g \cdot s}{J_A} = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot s}{J_A}} \quad (9)$$

Für die Schwingungsdauer des Pendels folgt mittels $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot g \cdot s}} \quad (10)$$

Nun stellt sich die Frage nach dem Trägheitsmoment. Da wir in unserem Versuch ein Pendel benutzen, welches eine zylindrische Form aufweist, berechnet sich das Trägheitsmoment eines zylindrischen Stabes nach dem Steinerschen Satz als:

$$J_A = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \quad (11)$$

Eingesetzt in (10) ergibt das:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot s}} \quad (12)$$

Aufgrund der zylindrischen Symmetrie des Stabes (und angenommener homogener Massenverteilung) ist der Schwerpunkt in der Mitte des Stabes, also $s = \frac{1}{2} \cdot l$. Damit ergibt sich:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{g}} \quad (13)$$

Ein mathematisches Pendel aber schwänge mit

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (14)$$

Somit führen wir die bereits oben erläuterte reduzierte Pendellänge ein, für die (nach Vergleich von (13) und (14)) gilt:

$$l_r = \frac{2}{3} \cdot l \quad (15)$$

Beim folgenden Versuch, bei dem wir mittels Reversionspendel (s.u.) die reduzierte Länge ermitteln werden, benutzen wir einen zylindrischen Metallstab der Länge $l = 0,962\text{m}$ (Vorbereitungsmappe). Dieser Wert wurde mittels Maßband verifiziert. Somit ergibt sich nach (15) die reduzierte Länge des Stabes zu:

$$\boxed{l_r = 0,641 \text{ m}}$$

Es sollte sich nun rechnerisch davon überzeugt werden, dass eine Massenänderung im eben errechneten Abstand l_r vom Drehpunkt keine Veränderung der Schwingungsdauer nach sich zieht. Nehmen wir einmal an, wir brächten eine zusätzliche Masse m^* im Abstand $l_r = \frac{2}{3} \cdot l$ an. Dann veränderte sich das Trägheitsmoment folgendermaßen:

$$J_A^* = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + m^* \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l\right)^2 \quad (16)$$

Eingesetzt in (10) ergäbe das:

$$T^* = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A^*}{m \cdot g \cdot s}} \quad (17)$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + m^* \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l\right)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m^*\right) \cdot g \cdot l}} \quad (18)$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m^*\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m^*\right) \cdot g \cdot l}} \quad (19)$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{g}} \quad (20)$$

Dieser Term stimmt mit dem aus (13) überein und somit haben wir gezeigt, dass $T^* = T$ gilt, also eine Massenänderung bei l_r keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer hat. Somit werden die Klauen, mit denen die Schneiden des Pendellagers am Stab befestigt sind, nur zu geringen Abweichungen führen.

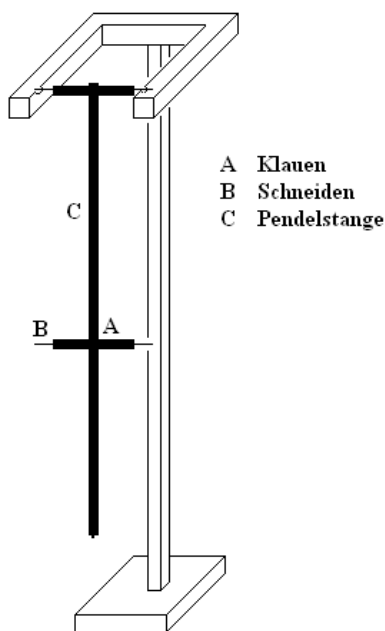
1.2 Bestimmung der Fallbeschleunigung mittels Reversionspendel

Mittels des Pendels wollen wir nun die Fallbeschleunigung messen. Der Zusammenhang zum Pendel ergibt sich unmittelbar aus (14):

$$g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (21)$$

Somit müssen nur noch geeignete Werte für l_r und T haben, welche mittels des Reversionspendels gefunden werden.

Funktionsweise des Reversionspendels:



Wir erwähnt ist die reduzierte Länge des physikalischen Pendels zu finden. Hierzu arbeitet man mit dem sogenannten *Reversionspendel*, welches aus einer (skalierten) Metallstange besteht, an dessen einem Ende fest eine sog. *Klaue* angebracht ist. Diese Klaue ist nichts weiter als ein Metallstück, das kleine „Arme“ hat, die sog. *Schneiden*, die man in die Einkerbung, der *Schneidenpfanne*, des Stativs legt, wodurch die Stange also aufgehängt wird und wodurch sie pendeln kann. Die eine Klaue ist wie gesagt fest, die andere ist frei verschieb- und arretierbar. Das Vorgehen zur Bestimmung der reduzierten Pendellänge ist folgendes:

Man hängt die Stange an der festen Klaue/Schneide auf, lässt sie bei nicht ganz so großer Auslenkung (man erinnere sich - wir näherten $\sin \varphi \approx \varphi$) los (wobei natürlich darauf zu achten ist, dass die Stange voll durch die (hier nicht gezeichnete) Lichtschranke schwingt) und misst die Periodendauer. Dies wird man zwecks Messgenauigkeit so durchführen, dass man mehrere Schwingungen lang misst und die gemessene Zeit durch die Anzahl der Perioden teilt. Nun verstellt man die Klaue, wodurch sich die Massenaufteilung des Pendels und damit sein Trägheitsmoment ändert, was zu einer veränderten Schwingungsdauer führt. Dies führt man durch, idealerweise nahe der ver-

muteten reduzierten Länge in relativ kleinen Abständen. Hat man also den vermuteten Bereich vermessen, so trägt man das Ergebnis in einem Diagramm „Periodendauer über Schneidenabstand“ auf und kommt zum zweiten Teil der Messung: man dreht nämlich die Stange, so dass ab jetzt auf der zweiten Schneide gependelt wird. hierbei ist zu beachten, dass der Abstand der Schneiden nicht zu klein werden darf, denn sonst fällt das Pendel von der Aufhängung. Man geht wieder genauso vor, wie bei der ersten Messung - man pendelt, misst die Periodendauer und verstellt den Schneidenabstand. Wieder trägt man die Resultate im Diagramm „Periodendauer über Schneidenabstand“ auf - man wird feststellen, dass sich die beiden resultierenden Graphen an einem Punkt schneiden - dies stellt genau den von uns gesuchten Punkt dar, nämlich mit der reduzierten Länge als X-Koordinate und mit der Schwingungsdauer als Y-Koordinate.

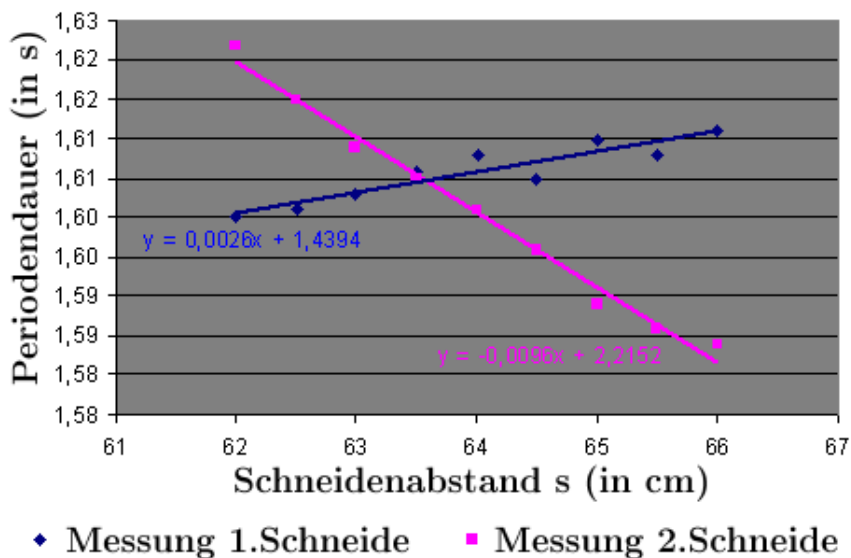
Wie erwähnt wurde bei kleinen Auslenkungen gemessen, erstens aufgrund der harmonischen Näherung und zweitens kommt hinzu, dass bei stärkerer Auslenkung des Pendels, es auf seinem Weg eine deutlich höhere Geschwindigkeit erreicht, weswegen sich sowohl Luft- als auch Schneidenwiderstände bemerkbar machen dürften. Dies sei hier ohne Werte nur angegeben: die Prognose der veränderten Werte aufgrund der weiteren Auslenkung bewahrheitete sich, denn anfangs wechselten wir die Aufgaben, wer die Messwerte notiert und wer die Auslenkung vornimmt - da wir beide unterschiedlich auslenkten, ergab sich sofort eine signifikante Abweichung von den vorherigen Werten, was wir zum Anlass nahmen, dass immer der gleich das Pendel auslenkt. Es ergaben sich die folgenden Messwerte (der Abstand der Schneiden sei mit s bezeichnet, die Schwingungsdauer (S-Dauer) bezieht sich jeweils auf 10 Perioden, Periodendauer: P-Dauer):

Messung 1. Schneide

Messung 2. Schneide

s (in cm)	S-Dauer (in s)	korr. S-Dauer (in s)	P-Dauer (in s)	s (in cm)	S-Dauer (in s)	korr. S-Dauer (in s)	P-Dauer (in s)
50	15,86	15,74	1,57	50	20,90	20,78	2,08
55	15,97	15,85	1,59	55	18,11	17,99	1,80
60	16,10	15,98	1,60	60	16,67	16,55	1,66
60,5	16,08	15,96	1,60	62	16,34	16,22	1,62
61	16,11	15,99	1,60	62,5	16,27	16,15	1,62
61,5	16,17	16,05	1,61	63	16,21	16,09	1,61
62	16,12	16,00	1,60	63,5	16,17	16,05	1,61
62,5	16,13	16,01	1,60	64	16,13	16,01	1,60
63	16,15	16,03	1,60	64,5	16,08	15,96	1,60
63,5	16,18	16,06	1,61	65	16,01	15,89	1,59
64	16,2	16,08	1,61	65,5	15,98	15,86	1,59
64,5	16,17	16,05	1,61	66	15,96	15,84	1,58
65	16,22	16,1	1,61	66,5	15,94	15,82	1,58
65,5	16,2	16,08	1,61	67	15,89	15,77	1,58
66	16,23	16,11	1,61	67,5	15,86	15,74	1,57
66,5	16,23	16,11	1,61	68	15,88	15,76	1,58
67	16,22	16,1	1,61	68,5	15,84	15,72	1,57
67,5	16,23	16,11	1,61	69	15,84	15,72	1,57
68	16,24	16,12	1,61	69,5	15,81	15,69	1,57
68,5	16,26	16,14	1,61	70	15,80	15,68	1,57
69	16,28	16,16	1,62	70,5	15,8	15,68	1,57
69,5	16,32	16,2	1,62	71	15,81	15,69	1,57
70	16,29	16,17	1,62				
70,5	16,31	16,19	1,62				
71	16,34	16,22	1,62				
75	16,47	16,35	1,64				
80	16,62	16,50	1,65				

Nun gibt es zwei Vorgehensweisen: zum einen könnten wir alle Werte in einem Diagramm auftragen - für die eine Schneide würden wir dann eine Gerade, für die andere einen Graphen erhalten, den wir polynomial annähern könnten. Da aber um die reduzierte Länge herum ungefähr Linearität herrscht (eben bei beiden Funktionen, wählen wir die Werte, die eng aneinander liegen aus und suchen dort den Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden:



Wir erhalten also die Geradengleichungen

$$y(x) = 0,0026 \cdot x + 1,4394 \quad (22)$$

$$y(x) = -0,0096 \cdot x + 2,2152 \quad (23)$$

mittels derer wir die reduzierte Länge l_r als X-Koordinate des Schnittpunkts errechnen und somit auch T als Y-Koordinate. Nach kurzem Auflösen erhält man:

$$\begin{array}{l} l_r = 63,6 \text{ cm} \\ T = 1,60 \text{ s} \end{array}$$

Das wiederum ergibt, eingesetzt in (21):

$$g = 9,75 \frac{m}{s^2}$$

Somit haben wir lediglich eine Abweichung von 0,6% vom Literaturwert $9,81 \frac{m}{s^2}$ und auch den Wert für die reduzierte Länge weicht lediglich um 0,9% ab.

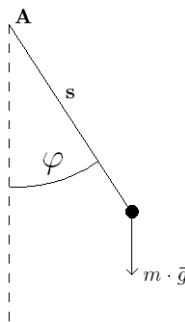
Am Ende stand noch die Frage im Raum:

Wie sieht wohl ein Reversionspendel aus, bei dem der Schneidenabstand fest ist, und das dennoch auf gleiche Schwingungsdauern um beide Schneiden eingestellt werden kann?

Zur Beantwortung müssen wir nur darüber nachdenken, was für Variablen und Größen es beim Reversionspendel gibt: wir haben bei unserer Durchführung den Schneidenabstand geändert, das soll beim anderen Pendel nicht mehr möglich sein. Was also eigentlich nur bliebe wäre - eine Veränderung der Länge des pendelnden Stabes! Da sich die reduzierte Länge ja auf die Gesamtlänge bezieht, könnte man die Gesamtlänge ändern, beispielweise durch anschraubbare Endstücke (denkbar wäre auch eine Teleskopstange, aber das ergäbe Probleme, da das Trägheitsmoment jeweils angepasst werden müsste).

2 Fadenpendel

Das Fadenpendel sieht folgendermaßen aus:



Das Fadenpendel kommt der Anordnung eines mathematischen Pendels schon sehr nahe - die Masse des Fadens ist vernachlässigbar klein gegenüber der Kugel, somit ist die Betrachtung der reduzierten Länge, die wir eingeführt hatten, um die Eigenmasse des zylindrischen Stabes zu berücksichtigen, hinfällig. Da die Kugel allerdings kein idealisierter Massepunkt ist, sondern eine Ausdehnung hat, muss das entsprechende Trägheitsmoment berücksichtigt werden.

2.1 Bestimmung der Fallbeschleunigung bei kleinen Auslenkungen

Es soll hier wieder die Fallbeschleunigung ermittelt werden. Für eine Kugel des Radius r gilt das Trägheitsmoment:

$$J_K = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \quad (24)$$

Mittels des Satzes von Steiner gilt für das Trägheitsmoment für eine Drehung um den Aufhängepunkt im Abstand $(l + r)$:

$$J = J_K + m \cdot (l + r)^2 \quad (25)$$

Für die Schwingungsdauer gilt wie vorhin (10) und somit:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}} \quad (26)$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot (l + r)^2}{m \cdot g \cdot (l + r)}} \quad (27)$$

Kürzung von m und Auflösen nach g ergibt für die Fallbeschleunigung:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + (l + r)^2}{l + r} \quad (28)$$

Somit maßen wir die Länge des Fadens, der die Kugel hielt und den Radius der Kugel, wobei der Begriff „Kugel“ nicht ganz richtig ist, denn diese war (wahrscheinlich durch Aufschläge am Boden) schon sehr aus ihrer symmetrischen Form gebracht und Durchmesser in vertikaler und horizontaler unterschieden sich deutlich. Wir wählten den vertikalen Durchmesser, da es auf die Gesamtlänge des Pendels ankommt. Mir maßen:

Länge l des Seils:	247,7 cm
Radius r der Kugel:	2,97 cm

Desweiteren ergaben sich für die Periodendauern folgende Werte (wobei für die Schwingungsdauer wieder 10 Perioden abgewartet wurden):

Auslenkung (in °)	Schwingungsdauer (in s)	korr. Schwingungsdauer (in s)	Periodendauer (in s)
5	30,25	30,06	3,01
10	31,94	31,75	3,18
15	31,7	31,51	3,15
20	32,15	31,96	3,20

Hierbei auftretende Messungenauigkeiten dürften hauptsächlich darauf zurückgehen, dass die Winkelskala an die Wand gemalt war und man erhebliche Probleme hatte, den Winkel genau einzustellen. Es ergibt sich mit dieser Methode (mit einem gemittelten Wert für T):

$$g = 10,07 \frac{m}{s^2}$$

Dies stellt eine Abweichung von 2,6% vom Literaturwert dar, womit die in Aufgabe 1 verwendete Methode augenscheinlich zu bevorzugen wäre. Allerdings ließe sich die Genauigkeit dieser Methode durch eine größere Anzahl von Messwerten verbessern. Würde man den ersten Wert für 5° als Ausreißer streichen und den Rest arithmetisch mitteln, so ergäbe sich (und das war eigentlich zu erwarten, denn der Aufbau entspricht sehr stark den idealen Verhältnissen für das mathematische Pendel) genau ein Wert von 9,81.

2.2 Abhängigkeit von Schwingungsdauer und Schwingungsweite

Bisher sind wir von der harmonischen Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ ausgegangen, welche natürlich ab etwas größeren Auslenkungen und damit größeren Winkeln ihre „Richtigkeit“ verliert. Um das auszugleichen, müssen wir uns mit der ursprünglichen Differentialgleichung beschäftigen, die wir vor der Näherung erhielten:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \quad (29)$$

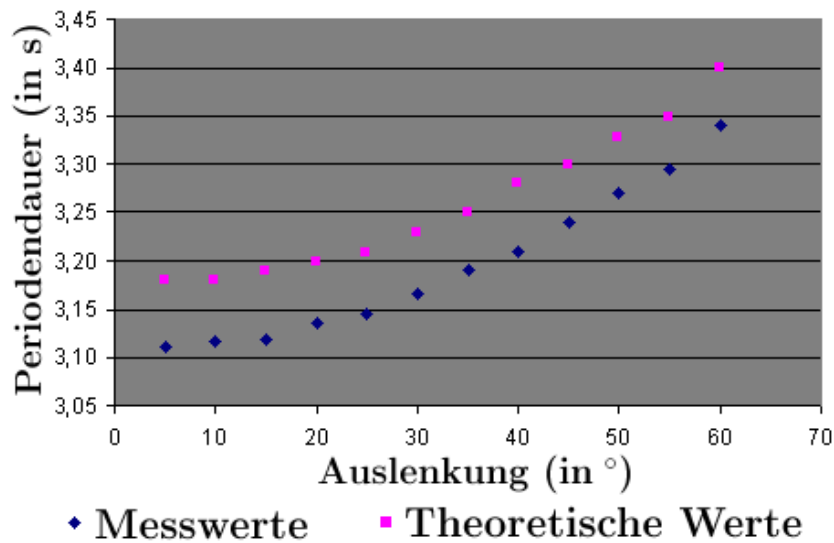
Die Lösung dieser Differentialgleichung geht sogar über den Rahmen der Hilfsliteratur (Walcher, Physikalisches Praktikum) hinaus und sei deshalb nur angegeben und nicht hergeleitet:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + (l+r)^2}{g \cdot (l+r)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{9}{64} \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \dots \right) \quad (30)$$

Es werden sich jedoch Abweichungen von diesem theoretischen Wert ergeben, da wir weder Luft- noch sonstige Reibung berücksichtigt haben - trotzdem: man erkennt, dass die Sinus-Terme bei steigenden Winkeln deutlichen Einfluss haben werden. Zu erwarten ist eine Kurve (im Diagramm „Auslenkung über Periodendauer“), die erst flach ansteigt, denn in einem kleinen Bereich gilt die harmonische Näherung ja. Bei steigenden Winkeln sollten sich die Sinus-Terme derart auswirken, dass der Anstieg immer steiler wird. Im folgenden sind unsere Messwerte aufgelistet, zusammen mit den theoretischen Werten, welche sich aus (30) ergeben; die Seillänge l und der Kugelradius r werden aus dem vorherigen Aufgabenteil entnommen. Wir maßen wie folgend: einer lenkte das Pendel auf den gewünschten Winkel aus, unter Hilfe des anderen bei der Betrachtung der Skala! Dann wurden zwei Perioden gemessen, die Kugel aufgefangen und die Messung für einen anderen Winkel wiederholt.

Auslenkung (in °)	Schwingungs- dauer (in s)	korr. Schwing- ungsdauer (in s)	Perioden- dauer (in s)	errechnete Periodendauer (in s)
60	6,87	6,68	3,34	3,40
55	6,78	6,59	3,30	3,35
50	6,73	6,54	3,27	3,33
45	6,67	6,48	3,24	3,30
40	6,61	6,42	3,21	3,28
35	6,57	6,38	3,19	3,25
30	6,52	6,33	3,17	3,23
25	6,48	6,29	3,15	3,21
20	6,46	6,27	3,14	3,20
15	6,43	6,24	3,12	3,19
10	6,42	6,23	3,12	3,18
5	6,41	6,22	3,11	3,18

Bei der Interpretation dieser Werte ist vor allem eines auffällig: die errechnete Periodendauer weicht bei annähernd allen Werte um 0,06 Sekunden ab und zwar alle in eine Richtung, was auf einen systematischen Fehler bei der Messung hindeutet. Dieser war allerdings weder bei der Messung noch bei der nachfolgenden Auswertung ermittelbar. Somit bleiben wir auf Vermutungen beschränkt, woher dieser Fehler stammen kann: eine Möglichkeit ist, dass sich der Fehler des Zeitmessgeräts während unserer Messungen verändert hat. Dies würde vor allem deshalb stark ins Gewicht fallen, da wir für jeden Winkel 2 Perioden gemessen haben und je weniger Perioden gemessen werden, desto stärker fällt die Messabweichung bei der Berechnung der Durchschnittsperiodendauer pro Winkelmessung ins Gewicht. Eine andere Quelle kann die Luftreibung sein, die, wie oben erwähnt, in der Näherung natürlich nicht enthalten ist. Ebenfalls wahrscheinlich ist, dass derjenige, der das Pendel ausgelenkt hat, bei der Auslenkung stets einen Fehler gemacht hat, der sich vor allem aus dem Winkel, unter dem man das Pendel und die Skala beobachtet wurden, erklärt. Es war z.B. kaum möglich bei den mittleren Werten eine genaue Einstellung vorzunehmen, da der Tisch einen senkrechten Blick auf Faden mit der Skala im Hintergrund verwehrt hat. Deutlich wird die Abweichung umso mehr, wenn wir die Werte graphisch auftragen:



Hier sehen wir zumindest, dass unsere Messungen qualitativ richtig waren, der Verlauf der von uns ermittelten Werte folgt dem theoretischen Verlauf sehr stark.

3 Gekoppelte Oszillatoren

3.1 Einstellung zweier gleichartiger Pendel auf gleiche Schwingungsdauern

Wie in der Vorbereitung bereits beschrieben, stellten wir zunächst eines der Pendel fest ein und verschoben dann das Gewicht am zweiten Pendel, bis beide die gleiche Schwingungsdauer aufwiesen, in unserem Fall $T_0 = 1,78s$. Der Abstand L_z zwischen Drehpunkt und Zentrum der Pendelscheibe betrug $L_z = 83,5 \text{ cm}$.

3.2 Gleichphasige und gegenphasige Schwingung

Nachdem wir in 3.1 die beiden Pendel auf die gleiche Schwingungsdauer T_0 eingestellt hatten, kopelten wir die beiden Pendel mit einer Schraubenfeder. Für zwei unterschiedliche Koppellängen (also unterschiedlich starke Kopplungen) bestimmten wir jeweils die Schwingungsdauern bei gleichphasiger und gegenphasiger Schwingung. Die Ergebnisse dieser Messung sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst, wobei die jeweiligen Kreisfrequenzen mit der Formel

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \quad (31)$$

errechnet worden sind:

	Koppellänge $l=26\text{cm}$	Koppellänge $l=48\text{cm}$
T_{gl} [s]	1,77	1,79
T_{geg} [s]	1,56	1,30
ω_{gl} [$\frac{1}{s}$]	3,56	3,50
ω_{geg} [$\frac{1}{s}$]	4,02	4,82

- Die Schwingungsdauer bei gleichphasiger Schwingung T_{gl} ist nahezu konstant, die Werte weichen mit 1,77 und 1,79 Sekunden kaum von $T_0 = 1,78s$ ab. die Kopplung hat in diesem Fall also keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer, was auch einsichtig ist, denn: schwingen die beiden Pendel in Phase, so ändert sich der Abstand der beiden Feder-Aufhängungspunkte nicht, was man mit dem Auge beobachten kann. Die Schwingung ist somit völlig unabhängig von der Kopplung.
- Die Schwingungsdauer im gegenphasigen Fall T_{geg} wird mit zunehmender Kopplungslänge (und dementsprechend höherer Kopplung) kleiner. Im Gegensatz zur gleichphasigen Anregung ist die Schwingungsdauer also kopplungsabhängig.

In der Vorbereitung haben wir folgende Variablen eingeführt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L_z}{J}} \quad (32)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{D_{12} \cdot l^2}{J}} \quad (33)$$

Durch das Lösen des linearen Differentialgleichungssystems, das unser gekoppeltes Pendel beschreibt, sind wir in der Vorbereitung auf folgende Zusammenhänge gestoßen:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \quad (\text{gleichphasig}) \quad (34)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \Omega^2 \quad (\text{gegenphasig}) \quad (35)$$

Nach (34) gilt also bei der Koppellänge $l=26 \text{ cm}$:

$$\omega_0 = \omega_{gl} = 3,56 \frac{1}{s} \quad (36)$$

Löst man (35) nach Ω auf, so ergibt sich (ebenfalls für die Koppellänge $l=26 \text{ cm}$):

$$\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_{geg}^2 - \omega_0^2} = 0,93 \frac{1}{s} \quad (37)$$

Für die Berechnung des resultierenden Trägheitsmoments J löst man die Beziehung (32) nach J auf:

$$J = \frac{m \cdot g \cdot L_z}{\omega_0^2} \quad (38)$$

Bekannt sind bereits $L_z = 83,5 \text{ cm}$ und $\omega_0 = 3,56 \frac{1}{s}$, siehe oben. Die Gesamtmasse m des Pendels beträgt $1,98 \text{ kg}$. Das Trägheitsmoment J lautet also mit (38):

$$J = 1,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (39)$$

Nun lässt sich mit (33) die Federkonstante D_{12} berechnen, alle hierzu nötigen Größen sind bereits bekannt:

$$D_{12} = \frac{\Omega^2 \cdot J}{l^2} = 16,4 \frac{N}{m} \quad (40)$$

Für die Koppellänge $l=48 \text{ cm}$ seien die zu berechnenden Größen in folgender Tabelle zusammengefasst:

Größe	Einheit	Betrag	Berechnet mit...
ω_0	$\frac{1}{s}$	3,50	Formel (36)
Ω	$\frac{1}{s}$	1,66	Formel (37)
Trägheitsmoment J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	1,32	Formel (38)
Federkonstante D_{12}	$\frac{N}{m}$	15,8	Formel (40)

Es ergeben sich demnach nur geringe Abweichungen zu den Ergebnissen bei der Koppellänge $l=26 \text{ cm}$, was angesichts der ungenauen Messung per Stoppuhr sehr erfreulich ist.

3.2.1 Theoretische Berechnung des Trägheitsmoments

Das Trägheitsmoment J des Pendels errechnet sich als Summe aus:

1. Trägheitsmoment der Pendelscheibe
2. Trägheitsmoment des Pendelstabes
3. Trägheitsmoment der Federkopplung

Die einzelnen Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse errechnen sich mit Hilfe des Steinerschen Satzes (wobei $R=5 \text{ cm}$ der Radius der Pendelscheibe ist):

$$J_{Stab} = \int_0^{L_z-R} \rho \cdot x^2 dx \quad (41)$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot x^3 \right]_0^{L_z-R} = \left[\frac{1}{3} \cdot 0,744 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot x^3 \right]_{0m}^{0,785m} = 0,120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (42)$$

$$J_{Scheibe} = \frac{1}{2} \cdot m_{Scheibe} \cdot R^2 + m_{Scheibe} \cdot L_z^2 \quad (43)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1,221 \text{ kg} \cdot (0,05m)^2 + 1,221 \text{ kg} \cdot (0,835m)^2 = 0,853 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (44)$$

$$J_{Kopplung} = l^2 \cdot m_{Feder} \quad (45)$$

$$= (0,26m)^2 \cdot 0,044 \text{ kg} = 0,003 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (46)$$

Die Summe der einzelnen Trägheitsmomente ergibt das theoretische Gesamtträgheitsmoment des Pendels:

$$J = 0,976 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (47)$$

Theoretisch und experimentell (siehe (39)) ermittelter Wert liegen also zumindest grob in der gleichen Größenordnung. Die relativ starke Abweichung war angesichts der ungenauen Messungen (vor allem die Messung der Periodendauer von Hand per Stoppuhr) zu erwarten.

3.2.2 Statische Bestimmung der Federkonstanten

Bei der statischen Bestimmung der Federkonstanten D macht man sich zu Nutze, dass bei Federn die Ausdehnung x proportional zur angreifenden Kraft F ist (Hooksches Gesetz).

$$D = \frac{F}{x} = \frac{m \cdot g}{x} \quad (48)$$

Im Experiment belasteten wir die Feder mit verschiedenen Massen m und bestimmten jeweils die Längenausdehnung x der Feder. In der folgenden Tabelle ist die mit Formel (48) berechnete Federkonstante gleich eingetragen.

Masse m [g]	Auslenkung x [cm]	Federkonstante D [$\frac{N}{m}$]
100	3,4	28,9
200	7,4	26,5
500	19,4	25,3
1000	35,4	27,7

Als Mittelwert ergibt sich so $\bar{D} = 27,1 \frac{N}{m}$, was aus den gleichen Gründen wie in 3.2.1 leider wieder recht stark von dem im Kopplungsversuch hergeleiteten Wert abweicht.

3.2.3 Dynamische Bestimmung der Federkonstanten

Bei diesem Verfahren zur Bestimmung der Federkonstante geht man von der Beziehung für die Schwingungsdauer eines Federpendels aus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (49)$$

Mit verschiedenen Massen regten wir die Feder zu Schwingungen an und bestimmten die Schwingungsdauer. Löst man (49) nach D auf, so erhält man die Formel um die Federkonstante auszurechnen:

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} \quad (50)$$

Masse m [g]	Schwingungsdauer T [s]	Federkonstante D [$\frac{N}{m}$]
100	0,452	19,3
200	0,57	24,3
500	0,896	24,6
1000	1,228	26,2

Der Mittelwert $\bar{D} = 23,6 \frac{N}{m}$ liegt zwar etwas näher an dem aus gleich- und gegenphasiger Schwingung der gekoppelten Pendel hergeleiteten Wert, doch auch hier treten große Unsicherheiten vor allem aufgrund der ungenauen Zeitmessung auf.

3.3 Schwebungen

Weiterhin verwendeten wir die gekoppelten Pendel mit der Koppellänge $l=26$ cm, regten das System aber weder gleich- noch gegenphasig, sondern mit unterschiedlicher Phase an. Hierzu lenkten wir lediglich ein Pendel aus und beließen das andere in der Ruhelage. Per Stoppuhr und Augenmaß ermittelten wir die beiden zu beobachtenden Schwingungsdauern:

- T_{osz} : Schwingungsdauer der einzelnen Pendel
- T_{mod} : Schwebungsdauer, die aussagt, wie lange es dauert bis das zunächst in Ruhe befindliche Pendel wieder in Ruhe ist

Unsere (sicherlich aus o.g. Gründen wieder stark fehlerbehafteten) Werte waren:

$$T_{osz} = 1,67 \text{ s} \quad (51)$$

$$T_{mod} = 31,7 \text{ s} \quad (52)$$

In der Vorbereitung hatten wir Formeln für die theoretische Berechnung der beiden Schwingungsdauern hergeleitet:

$$T_{osz} = \frac{2 \cdot T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} \quad (53)$$

$$T_{mod} = \frac{2 \cdot T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \quad (54)$$

Die theoretischen Werte, errechnet anhand der Formeln (53) und (54) und mit den Messwerten aus der ersten Tabelle von 3.2 ergeben sich zu:

$$T_{osz} = 1,66 \text{ s} \quad (55)$$

$$T_{mod} = 26,3 \text{ s} \quad (56)$$

Da sich die Abweichungen zu den direkten Messungen der Schwingungsdauern in Grenzen halten (gerade bei T_{osz}), können wir die theoretischen Formeln als bestätigt betrachten.