Versuch: P1-20

Pendel

- Vorbereitung -

Vorbemerkung
Das einfachste Modell, um einen Pendelversuch zu beschreiben, ist das mathematische Pendel. Bei dieser Vereinfachung wird angenommen, dass die gesamte Masse in der Pendelspitze sitzt, was bei einem Fadenpendel mit vernachlässigbarem Aufhängefaden die Realität recht gut approximiert. Pendelt man allerdings einen starren Körper, bei dem sich nicht quasi die gesamte Masse in der Spitze befindet, so verliert diese Näherung ihre Gültigkeit. In diesem Fall rechnet man mit der reduzierten Pendellänge, die der Pendellänge eines mathematischen Pendels mit den gleichen Schwingungseigenschaften wie dieses physikalischen Pendels entspricht.

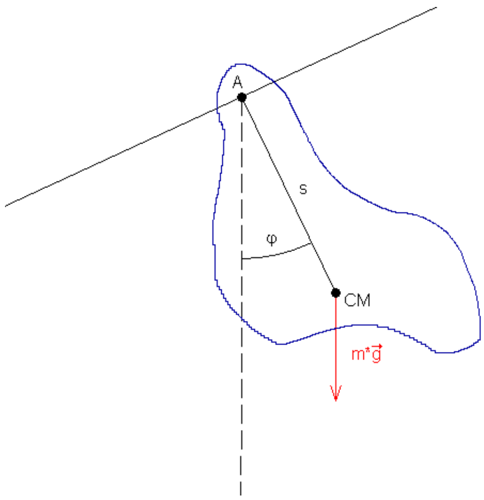
Inhaltsverzeichnis

1 Physikalisches Pendel, Reversionspendel

1.1 Berechnung der reduzierten Pendellänge l_r

Allemein gilt für einen ausgedehnten Körper, der als physikalisches Pendel verwendet wird: das rücktreibende Drehmoment des um einen Winkel φ aus der Ruhelage ausgelenkten Massenschwerpunkts (Abstand Aufhängepunkt A - CM: s) lautet:

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\varphi \tag{1}$$



Für kleine Winkel können wir (1) mit $\sin\varphi \approx \varphi$ vereinfachen:

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi \tag{2}$$

Das Trägheitsmoment des Körpers bei Drehung um den Punkt A sei im folgenden mit J_A bezeichnet. Die durch das rücktreibende Drehmoment hervorgerufene beschleunigte Drehbewegung folgt der Beziehung:

$$M = J_A \cdot \ddot{\varphi} \tag{3}$$

(2) und (3) ergeben die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels:

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot s \cdot \varphi = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot s \cdot \varphi}{J_A} = 0 \tag{5}$$

Da es sich hierbei um eine Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, lautet eine Lösung der DGL beispielsweise:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \beta) \tag{6}$$

Setzt man (6) in (5) ein, so erhält man:

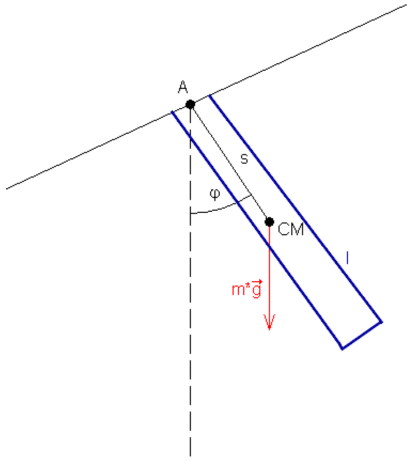
$$-\omega^2 + \frac{m \cdot g \cdot s}{J_A} = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot s}{J_A}} \tag{8}$$

Mit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ folgt für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{m \cdot g \cdot s}} \tag{9}$$

In diesem Fall dient ein zylindrischer Stab als physikalisches Pendel:



Das Trägheitsmoment eines zylindrischen Stabes lautet nach dem Steinerschen Satz:

$$J_A = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \tag{10}$$

Eingesetzt in (9) folgt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot s}} \tag{11}$$

Der Massenschwerpunkt eines zylindrischen Stabes liegt in der Mitte, also $s = \frac{1}{2} \cdot l$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{g}} \tag{12}$$

Verglichen mit der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{13}$$

beträgt die reduzierte Pendellänge $l_r = \frac{2}{3} \cdot l$.

Bringt man nun die zusätzliche Masse m_+ im Abstand l_r vom Aufhängepunkt A an, ändert sich das Trägheitsmoment des Stabes wie folgt:

$$\tilde{J}_A = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + m_+ \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l\right)^2 \tag{14}$$

Eingesetzt in die Schwingungsdauer-Formel (9) folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{T} &= 2\pi \sqrt{\frac{\tilde{J}_A}{m \cdot g \cdot s}} && (15)\\
&= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + m_+ \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l\right)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m_+\right) \cdot g \cdot l}} && (16)\\
&= 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m_+\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m_+\right) \cdot g \cdot l}} && (17)\\
&= 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{g}} && (18)\\
&= T && (19)
\end{aligned}$$

nach Vergleich mit (12). Eine Massenänderung im Abstand l_r hat also keinen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des physikalischen Pendels. Bringt man allerdings in einem anderen Abstand eine Masse an, würde sich das Trägheitsmoment und damit auch die reduzierte Pendellänge ändern.

1.2 Reversionspendel: Bestimmung der Fallbeschleunigung g

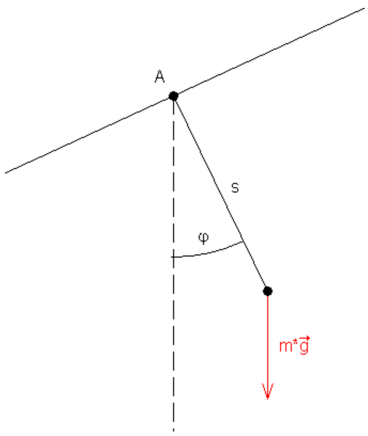
Mit (T, l_r)-Wertepaaren lässt sich die Fallbeschleunigung bestimmen. Die dafür benötigte Formel ergibt sich durch Auflösen von (12) (mit $\frac{2}{3} \cdot l = l_r$) nach g:

$$g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \tag{20}$$

- Zunächst ist l_r experimentell zu bestimmen. Dazu sucht man die beiden Schneiden, bei denen die Schwingungsdauern bei Schwingung um sie gleich groß sind. Der Abstand der beiden Schneiden hat gerade den Betrag von l_r.

- Wird die Amplitude des Pendels zu groß, so gilt die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ nicht mehr, was zu Fehlern führt. Außerdem hat das Pendel in diesem Fall eine höhere Geschwindigkeit, weshalb sich Reibungskräfte an den Schneiden und die Luftreibung deutlich stärker auswirken und die Messergebnisse zusätzlich verfälschen. Es sollte also nur bei kleinen Pendelausschlägen gemessen werden.

2 Fadenpendel



2.1 Bestimmung der Fallbeschleunigung g

Die Bestimmung der Fallbeschleunigung mit Hilfe des Fadenpendels funktioniert genau so wie beim starren Körper. Da das Fadenpendel dem Modell des mathematischen Pendels sehr nahe ist, entfällt die Betrachtung der reduzierten Länge l_r. Trotzdem sollte die Ausdehnung mit Radius r der Kugel berücksichtigt werden: das Trägheitsmoment einer Kugel bei Drehung um eine Achse durch den Mittelpunkt lautet:

$$J_{Kugel} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \tag{21}$$

Mit dem Satz von Steiner folgt das Trägheitsmoment für eine Drehung um den Aufhängepunkt im Abstand $r + l$:

$$J = J_{Kugel} + m \cdot (l + r)^2 \tag{22}$$

Die Schwingungsdauer beträgt dann nach (9):

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}} && (23) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot (l + r)^2}{m \cdot g \cdot (l + r)}} && (24) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + (l + r)^2}{g \cdot (l + r)}} && (25) \end{aligned}$$

(25) aufgelöst nach g liefert die Formel für die Fallbeschleunigung:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + (l+r)^2}{l+r} \tag{26}$$

2.2 Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Schwingungsweite

Für große Auslenkungen gilt die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ nicht mehr. Die Schwingung wird dann durch eine nichtlineare Differentialgleichung beschrieben:

$$J\ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin\varphi = 0 \tag{27}$$

Die Lösung von (27) ist ein elliptisches Integral, das mit Hilfe einer Reihenentwicklung näherungsweise bestimmt werden kann:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + (l+r)^2}{g \cdot (l+r)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + ...\right) \tag{28}$$

Eventuell auftretende Lagerreibungskräfte und Luftwiderstände sind in dieser Lösung natürlich auch nicht berücksichtigt, weshalb eine erhebliche Abweichung von den Messwerten zu erwarten ist.

3 Gekoppelte Oszillatoren

3.1 Einstellung zweier gleichartiger Pendel auf gleiche Schwingungsdauern

Zwei gleichartige Pendel seien mit folgenden Variablen charakterisiert:

- Masse: m
- Abstand zwischen Drehpunkt und Zentrum der Pendelscheibe: L_z
- Gleiche Schwingungsdauer: T_0

In diesem Versuchsteil sollen die Pendel auf die gleiche Schwingungsdauer T_0 fein abgestimmt werden. Vorgehensweise:

1. Festes Einstellen eines Pendels
2. Schrittweises verschieben des Pendelgewichts (Änderung von L_z) des zweiten Pendels, bis die Schwingungseigenschaften übereinstimmen

3.2 Gleichphasige und gegenphasige Schwingung

In diesem Versuchsteil widmen wir uns den beiden Schwingungen, bei denen keine Schwebung auftritt:

1. Pendel schwingen in Phase
2. Pendel schwingen genau um π phasenverschoben

Eine Messreihe mit verschiedenen Koppellängen l soll vorgenommen werden, wobei die Kopplung nicht allzu fest sein sollte. Die Bewegung der zwei gekoppelten Oszillatoren entspricht folgendem linearen Differentialgleichungssystem:

$$J\ddot{\varphi}_1 = -m \cdot g \cdot L_z \cdot \varphi_1 + D_{12} \cdot l^2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \tag{29}$$
$$J\ddot{\varphi}_2 = -m \cdot g \cdot L_z \cdot \varphi_2 + D_{12} \cdot l^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{30}$$

Wir verwenden nun:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L_z}{J}} \tag{31}$$
$$\Omega = \sqrt{\frac{D_{12} \cdot l^2}{J}} \tag{32}$$

(29) und (30) lauten dann:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= -\Omega^2(\varphi_1 - \varphi_2) &(33)\\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= -\Omega^2(\varphi_2 - \varphi_1) &(34)\end{aligned}$$

Dies kann man mit dem folgenden Ansatz lösen:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \vec{\varphi}_0 \cdot e^{i\omega t} &(35)\\ \ddot{\varphi}(t) &= -\omega^2 \vec{\varphi}_0 \cdot e^{i\omega t} &(36)\end{aligned}$$

mit

$$\vec{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung (33), (34) gilt dann:

$$\begin{aligned}(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) \cdot \varphi_1 - \Omega^2 \cdot \varphi_2 &= 0 &(38)\\ (-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) \cdot \varphi_2 - \Omega^2 \cdot \varphi_1 &= 0 &(39)\end{aligned}$$

Dieses LGS ist eindeutig lösbar, wenn gilt:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2 = \pm\Omega^2 \tag{40}$$

Dies ist der Fall, wenn:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_0^2 \quad \text{(gleichphasig)} &(41)\\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2 \cdot \Omega^2 \quad \text{(gegenphasig)} &(42)\end{aligned}$$

- Im gleichphasigen Fall wird die Kopplungsfeder also weder gestaucht noch gestreckt, so dass die gleichphasige Schwingung von ihr unabhängig ist.
- Zur Bestimmung der Federkonstanten D untersuchen wir die Ausdehnung x der Feder unter verschiedenen angehängten Massen. D errechnet sich dann durch:

$$D = \frac{F}{x} = \frac{m \cdot g}{x} \tag{43}$$

- Wollen wir die Federkonstante nicht statisch, sondern dynamisch bestimmen, messen wir für verschiedene Massenstücke die Schwingungsdauer der als Federpendel angeregten Feder. Mit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{44}$$

aufgelöst nach D lautet die Formel zur Berechnung der Federkonstante:

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} \tag{45}$$

3.3 Schwebungen

Regt man nur eines der Pendel zu einer Schwingung an, so wird man beobachten, dass aufgrund der Kopplung das zweite Pendel langsam anfängt zu schwingen, während das erste langsamer wird. Dies läuft so lange, bis das erste Pendel vollständig zur Ruhe gekommen ist und das zweite Pendel mit maximaler Amplitude schwingt. Anschließend geht die Schwingung wider von Pendel 2 zu Pendel 1 über. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch, die Schwingungsenergie wird also zwischen den Pendeln ausgetauscht.
Die Bewegungsgleichungen lassen sich im Schwebungsfall folgendermaßen lösen:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \varphi_0 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right) &(46)\\ \varphi_2(t) &= \varphi_0 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right) &(47)\end{aligned}$$

- Die kleinere der beiden auftretenden Frequenzen ist die Schwebungsfrequenz:

$$\omega_{mod} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \tag{48}$$

- Die größere der beiden auftretenden Frequenzen bezeichnet die Schwingungen der einzelnen Pendel:

$$\omega_{osz} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \tag{49}$$

- Hiermit lassen sich T_{mod} und T_{osz} ableiten:

$$T_{mod} = \frac{2\pi}{\omega_{mod}} \quad \Rightarrow \quad T_{mod} = \frac{2 \cdot T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \tag{50}$$

$$T_{osz} = \frac{2\pi}{\omega_{osz}} \quad \Rightarrow \quad T_{osz} = \frac{2 \cdot T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} \tag{51}$$

Die experimentelle Verifikation dieser Formel wird in der Aufgabenstellung gefordert.