Versuch: P1-20

# Pendel

*- Vorbereitung -*

**Vorbemerkung**
Da die Schwingung sowohl in der Natur als auch in der Technik eine sehr häufige und wichtige Bewegungsform ist, beschäftigen wir uns am beispiel von mechanischen Schwingungen mit ihr. Desweitern werden wir uns mit einigen Problemen der Bewegung starrer Körper auseinandersetzen. Meist wird das wirkende Kraftgesetz mittels geeignetem Versuchsaufbau vereinfacht, so dass es linearisiert werden kann. Die entsprechenden mathematischen Lösungen sind dann harmonische Schwingungen - dieses Verhalten entspricht aber nur dem Grenzfall und somit sind erhebliche Abweichungen zu erwarten, was in den folgenden Versuchen deutlich werden soll.

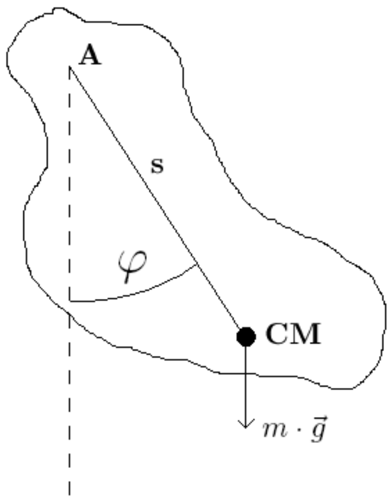
## Inhaltsverzeichnis

# 1 Physikalisches Pendel

Am einfachsten lässt sich die Schwingung eines Pendels folgendermaßen beschreiben: man approximiert, dass die Masse des Pendels in einem Massepunkt am Ende vereint ist - diese Anordnung heißt *mathematisches Pendel*. Die Approximation ist in der Realität bei einem Fadenpendel recht gut zutreffend, die Eigenmasse des Fadens ist vernachlässigbar gegenüber der Kugel am Ende. Der Erfolg der Approximation durch das mathematische Pendel geht aber verloren, wenn die Schwingung von einem starren Körper ausgeführt wird, wie beispielweise einer Eisenstange. Dies bezeichnet man als *physikalisches Pendel*. Beide Modelle werden vereint, indem man mit der sog. *reduzierten Pendellänge $l_r$* rechnet, die der Pendellänge eines mathematischen Pendels mit den gleichen Schwingungseigenschaften des zu betrachtenden physikalischen Pendels entspricht.

## 1.1 Reduzierte Pendellänge

Eben beschriebene reduzierte Pendellänge soll nun berechnet werden. Dazu betrachten wir ein physikalisches Pendel:




An dem aus seiner Ruhelage herausgedrehten System greift in CM (centre of mass) die Schwerkraft

$$F_S = m \cdot g \tag{1}$$

an, die zu einem rücktreibenden Drehmoment führt, für das gilt:

$$M_r = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\varphi \tag{2}$$

wobei $\varphi$ der Winkel ist, um den das Pendel ausgelenkt ist und s die Strecke von A zu CM. Bei kleinen Auslenkungen können wir annehmen, dass $\sin\varphi \approx \varphi$ gilt. Damit wird (2) zu:

$$M_r = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi \tag{3}$$

Lässt man das Pendel los, gerät es in eine beschleunigte Drehbewegung um A. Es gilt mit dem Trägheitsmoment $J_A$ des Körpers bzgl der Achse A:

$$M_r = J_A \cdot \ddot{\varphi} \tag{4}$$

Somit ergibt sich aus (3) und (4) die Bewegungsgleichung für das physikalische Pendel:

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi \tag{5}$$

Und damit:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot s}{J_A} \cdot \varphi = 0 \tag{6}$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2.Ordnung, deren Lösung beispielweise lautet:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \beta) \tag{7}$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Dgl ein, so erhält man:

$$-\omega^2 + \frac{m \cdot g \cdot s}{J_A} = 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot s}{J_A}} \tag{9}$$

Für die Schwingungsdauer des Pendels folgt mittels $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot g \cdot s}} \tag{10}$$

Nun stellt sich die Frage nach dem Trägheitsmoment. Da wir in unserem Versuch ein Pendel benutzen, welches eine zylindrische Form aufweist, berechnet sich das Trägheitsmoment eines zylindrischen Stabes nach dem Steinerschen Satz als:

$$J_A = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \tag{11}$$

Eingesetzt in (10) ergibt das:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2}{m \cdot g \cdot s}} \tag{12}$$

Aufgrund der zylindrischen Symmetrie des Stabes (und angenommener homogener Massenverteilung) ist der Schwerpunkt in der Mitte des Stabes, also $s = \frac{1}{2} \cdot l$. Damit ergibt sich:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{g}} \tag{13}$$

Ein mathematisches Pendel aber schwänge mit

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} \tag{14}$$

Somit führen wir die bereits oben erläuterte reduzierte Pendellänge ein, für die (nach Vergleich von (13) und (14)) gilt:

$$l_r = \frac{2}{3} \cdot l \tag{15}$$

Es sollte sich nun rechnerisch davon überzeugt werden, dass eine Massenänderung im eben errechneten Abstand $l_r$ vom Drehpunkt keine Veränderung der Schwingunsdauer nach sich zieht. Nehmen wir einmal an, wir brächten eine zusätzliche Masse $m^*$ im Abstand $l_r = \frac{2}{3} \cdot l$ an. Dann veränderte sich das Trägheitsmoment folgendermaßen:

$$J_A^* = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + m^* \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l\right)^2 \tag{16}$$

Eingesetzt in (10) ergäbe das:

$$\begin{aligned}
T^* &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A^*}{m \cdot g \cdot s}} && (17)\\
&= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + m^* \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l\right)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m^*\right) \cdot g \cdot l}} && (18)\\
&= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m^*\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot m + \frac{2}{3} \cdot m^*\right) \cdot g \cdot l}} && (19)\\
&= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{g}} && (20)
\end{aligned}$$

Dieser Term stimmt mit dem aus (13) überein und somit haben wir gezeigt, dass $T^* = T$ gilt, also eine Massenänderung bei $l_r$ keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer hat. Somit werden die Klauen, mit denen die Schneiden des Pendellagers am Stab befestigt sind, nur zu geringen Abweichungen führen.

## 1.2 Bestimmung der Fallbeschleunigung mittels Reversionspendel

Mittel des Pendels wollen wir nun die Fallbeschleunigung $g$ messen. Der Zusammenhang zum Pendel ergibt sich unmittelbar aus (14):

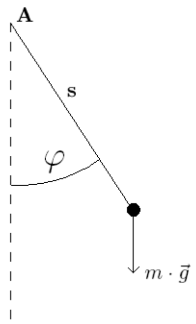
$$g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \tag{21}$$

Somit müssen wir geeingete Werte für $l_r$ und $T$ finden. Experimentell wird $l_r$ so gefunden, dass man den Schneidenabstand sucht, für den die Schwingungsdauern gleich sind, wenn das Pendel einmal um die eine, dann um die andere Schneide schwingt. Dieser Abstand entspricht $l_r$ (aufgrund dieses Vorgehens der Name Reversionspendel). Es soll ein kleines Intervall um den berechneten Wert herum ausgemessen werden, wobei sich auf kleine Auslenkungen zu beschränken ist. Diese Forderung erklärt sich daher, dass wir die harmonische Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ benutzt haben, die eben nur für kleine Winkel gilt. Hinzu kommt, dass wenn man das Pendel stärker auslenkt, es auf seinem Weg eine deutlich höhere Geschwindigkeit erreicht (da die Periodendauer nur von der Länge und von $g$ abhängt, müsste $T$ konstant sein) und sich somit Reibungskräfte, sowohl an Luft als auch Schneiden, stärker auswirken.

Nach jeder Messung wird die Schwingungsdauer in ein Diagramm Schwingungsdauer über Schneidenabstand eingetragen. Das heißt, dass sich einmal für den oberen Messpunkt A und einmal für den mittleren Messpunkt A' ein Graph ergibt und in diesem Punkt (wie oben beschrieben) finden wir unsere gesuchte reduzierte Pendellänge. Da schnell deutlich werden sollte, in welchem Bereich sich der gesuchte Punkt befindet, soll hier noch einmal präzise nachgemessen werden. Aus dem somit ermittelten Graphenschnittpunkt lesen wir also $l_r$ und die entsprechende Schwingungsdauer $T(l_r)$ ab und setzen sie in (21) ein, um die Fallbeschleunigung zu errechnen.

# 2 Fadenpendel

Das Fadenpendel sieht folgendermaßen aus:




Das Fadenpendel kommt der Anordnung eines mathematischen Pendels schon sehr nahe - die Masse des Fadens ist vernachlässigbar klein gegenüber der Kugel, somit ist die Betrachtung der reduzierten Länge, die wir eingeführt hatten, um die Eigenmasse des zylindrischen Stabes zu berücksichtigen, hinfällig. Da die Kugel allerdings kein idealisierter Massepunkt ist, sondern eine Ausdehnung hat, muss das entsprechende Trägheitsmoment berücksichtigt werden.

## 2.1 Bestimmung der Fallbeschleunigung bei kleinen Auslenkungen

Es soll hier wieder die Fallbeschleunigung ermittelt werden. Für eine Kugel des Radius $r$ gilt das Trägheitsmoment:

$$J_K = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \tag{22}$$

Mittels des Satzes von Steiner gilt für das Trägheitsmoment für eine Drehung um den Aufhängepunkt im Abstand $(l + l)$:

$$J = J_K + m \cdot (l + r)^2 \tag{23}$$

Für die Schwingunngsdauer gilt wie vorhin (10) und somit:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}} \tag{24}$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot (l + r)^2}{m \cdot g \cdot (l + r)}} \tag{25}$$

Kürzung von m und Auflösen nach $g$ ergibt für die Fallbeschleunigung:

$$g = \frac{4\pi^2}{T} \cdot \frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + (l + r)^2}{l + r} \tag{26}$$

## 2.2 Abhängigkeit von Schwingungsdauer und Schwingungsweite

Bisher sind wir von der harmonischen Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ ausgegangen, welche natürlich ab etwas größeren Auslenkungen und damit größeren Winkeln ihre „Richtigkeit“ verliert. Um das auszugleichen, müssen wir uns mit der ursprünglichen Differentialgleichung beschäftigen, die wir vor der Näherung erhielten:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \tag{27}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung geht sogar über den Rahmen der Hilfsliteratur (Walcher, Physikalisches Praktikum) hinaus und sei deshalb nur angegeben und nicht hergeleitet:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + (l + r)^2}{g \cdot (l + r)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{9}{64} \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + ...\right) \tag{28}$$

Es werden sich jedoch Abweíchungen von diesem theoretischen Wert ergeben, da wir weder Luft- noch sonstige Reibung Reibung berücksichtigt haben.

# 3 Gekoppelte Pendel

## 3.1 Einstellung gleicher Schwingungsdauer bei zwei gleichartigen Pendeln

Dieser Aufgabenteil ist vorbereitender Natur - es sollen zwei gleichartige Pendel eingestellt werden. Die Pendel sind charakterisiert durch:

- Die Masse $m$
- Den Abstand $L_Z$ zwischen Drehpunkt und Zentrum der Pendelscheibe
- Die Schwingungsdauer $T_0$

Die Pendel sollen nun auf gleiche Schwingungsdauer eingestellt werden. Dafür wählt man schlicht eine Pendel aus, welches man bei einer gewünschten Schwingungsdauer feststellt. Jetzt versucht man das andere Pendel mit genau den Eigenschaften des ersten, bereits festgestellten Pendels auszustatten, indem man schrittweise das Pendelgewicht verschiebt (also $L_Z$ ändert) und vergleicht, ob die Schwingungsdauern der beiden Pendel identisch sind. Sind sie identisch, dann wird das Pendelgewicht festgestellt.

## 3.2 Gegen- und gleichsphasige Schwingungen eines gekoppelten Pendels

Es gibt zwei Schwingungsmodi, in denen keine Schwebung, also Überlagerung der Einzelschwingungen auftritt:

a) Die gleichphasige Schwingung

b) Die gegenphasige Schwingung, d.h. Phasenverschiebung $\pi$

Es soll nun für verschiedene Koppellängen $l$ gemessen werden, jedoch soll die Kopplung nicht zu fest sein (d.h. $\Delta(T^2) << T^2$). Aus der Mechanik kennen wir bereits die Bewegungsgleichungen zweier durch eine Feder gekoppelte Oszillatoren:

$$J \cdot \ddot{\varphi}_1 = -m \cdot g \cdot L_Z \cdot \varphi_1 + D_{12} \cdot l^2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \tag{29}$$
$$J \cdot \ddot{\varphi}_2 = -m \cdot g \cdot L_Z \cdot \varphi_2 + D_{12} \cdot l^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{30}$$

Mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L_Z}{J}}, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{D_{12} \cdot l^2}{J}} \tag{31}$$

führen (29) und (30) auf:

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \cdot \varphi_1 = -\Omega^2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \tag{32}$$
$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \cdot \varphi_2 = -\Omega^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{33}$$

Dies führt mittels eines komplexen Ansatzes mit $\vec{\varphi_0} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$:

$$\varphi(t) = \vec{\varphi_0} \cdot e^{i\omega t} \tag{34}$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{\varphi_0} \cdot e^{i\omega t} \tag{35}$$

zu (eingesetzt in die Bewegungsgleichungen (32) und (33)):

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) \cdot \varphi_1 - \Omega^2 \cdot \varphi_2 = 0 \tag{36}$$
$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) \cdot \varphi_2 - \Omega^2 \cdot \varphi_1 = 0 \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

Für das LGS gibt es also genau dann eindeutige Lösungen, wenn gilt:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2 = \pm\Omega^2 \tag{39}$$

Es ergeben sich die bereits erwarteten Schwingungsmodi:

$$\begin{aligned} \text{gleichphasige Schwingung:} \quad \omega^2 &= \omega_0^2 && (40) \\ \text{gegenphasige Schwingung:} \quad \omega^2 &= \omega_0^2 + 2 \cdot \Omega^2 && (41) \end{aligned}$$

Gerade die gleichphasige Schwingung erklärt sich leicht: da die Feder weder gestaucht noch gestreckt wird, ist die Bewegungsgleichung von ihr unabhängig.

Nun ist noch die Federkonstante zu bestimmen - dazu gibt es zwei Variaten:

1. *statische Bestimmung*

   Man hängt bei dieser Methode die Feder schlicht an einen Haken und misst die Länge der Feder im Ruhezustand. Dann hängt man ein Gewicht an die Feder und misst die neue Länge. Die Differenz der beiden Längen, also die Ausdehnung sei bezeichnet mit $x$, für diese gilt:

   $$D = \frac{F}{x} = \frac{m \cdot g}{x} \tag{42}$$

2. *dynamische Bestimmung*

   Wir hängen die Feder wieder auf, auch mit Massenstück, beobachten aber diesmal das sich aus einer Auslenkung ergebende Schwingverhalten. Mittels der Schwingungsdauer $T$ und der Masse, für die gilt:

   $$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \tag{43}$$

   kann man so die Federkonstante bequem berechnen:

   $$D = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T^2} \tag{44}$$

## 3.3 Schwingungs- und Schwebungsdauer

Nun beschäftigen wir uns mit der sogenannten *Schwebung*. Regt man nämlich beim gekoppelten Pendel eines der Pendel an, so wird das zweite aufgrund der Kopplung durch die Feder langsam ebenfalls anfangen zu schwingen. Das wird sich soweit fortsetzten, bis die gesamte Bewegungsenergie des ersten auf das zweite Pendel übergegangen ist, d.h. dessen Amplitude ist die ursprüngliche des ersten Pendels, welches jetzt, wie ursprünglich das zweite, in Ruhe ist. Dann wiederholt sich der Vorgang, d.h. das zweite übertragt wieder langsam seine vom ersten gewonnene Bewegungsenergie auf das erste Pendel zurück. Dieser Austausch geht, natürlich abgeschwächt durch Reibung, periodisch vonstatten. Die Bewegungsgleichungen haben im Schewbungsfall folgende Form:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_0 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right) && (45) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_0 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right) && (46) \end{aligned}$$

Es ergeben sich folgende Größen:

- Die Schwebungsfrequenz, welche die kleinere der beiden ist:

  $$\omega_{mod} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \tag{47}$$

- Die Schwingung der einzelnen Pendel, welche die größere der beiden ist:

$$\omega_{osz} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \tag{48}$$

- Die entsprechenden Schwingungsdauern:

$$T_{mod} = \frac{\pi}{\omega_{mod}} \quad \Rightarrow \quad T_{mod} = \frac{T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \tag{49}$$

$$T_{osz} = \frac{2\pi}{\omega_{osz}} \quad \Rightarrow \quad T_{osz} = \frac{2 \cdot T_{gl} \cdot T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} \tag{50}$$

Hierbei sind $T_{gl}$ (gleichphasige Schwingungsdauer) und $T_{geg}$ (gegenphasige Schwingungsdauer) die aus den vorherigen Aufgabenteilen ermittelten Werte.

Die Gültigkeit dieser Formeln soll experiementell verifiziert werden.