

Versuch: P2-62

Glüh- und Feldemission

- Vorbereitung -

Vorbemerkung

In Metallen sind nicht alle Elektronen der einzelnen Atome fest an „ihr“ Atom gebunden, es gibt auch freie Elektronen (Leitungselektronen), die dem Metallverband insgesamt gehören. Verrichtet man Arbeit gegen die Bindungskräfte des Metallverbandes (atomar gesehen ein Potentialberg), so ist es möglich, dass Elektronen aus dem Metall austreten können. Wir unterscheiden zwei Effekte:

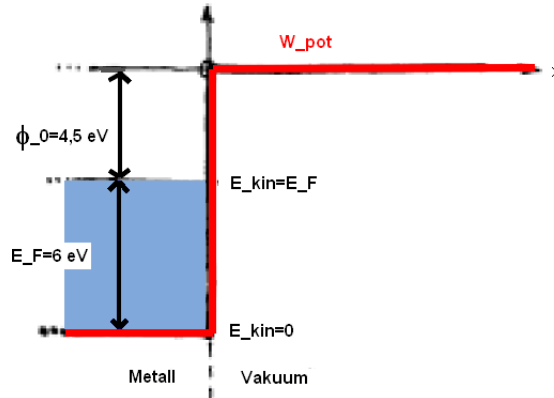
- **Glühemission:** durch Zufuhr von Wärme wird die kinetische Energie der Elektronen erhöht, so dass sie den (durch die Bindung an den Metallverband hervorgerufenen) Potentialberg überwinden können.
- **Feldemission:** Bei hoher elektrischer Feldstärke an der Metalloberfläche ist der Potentialberg sehr schmal. Auch bei Zimmertemperatur haben deshalb die Leitungselektronen die Möglichkeit, den Potentialberg zu passieren, indem sie hindurch tunneln (quantenmechanischer Tunneleffekt).

Inhaltsverzeichnis

1	Glühemission: Richardson-Gesetz	2
2	Diodenkennlinie, Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz und Schottky-Effekt	4
2.1	Diodenkennlinie	4
2.2	Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz	5
2.3	Schottky-Effekt	7
3	Feldemission, Fowler-Nordheim-Beziehung	9
4	Feldemissions-Mikroskop	11

1 Glühemission: Richardson-Gesetz

Im Außenraum schreibt man einem Elektron die potentielle Energie $W_{pot} = 0 \text{ eV}$ zu. In einem Metall jedoch besitzen Elektronen eine negative potentielle Energie. Die kinetischen Energien der Leitungselektronen erstrecken sich über den blauen Bereich in der folgenden Skizze:



Die kinetischen Energien erreichen maximal den Grenzwert E_F , die Fermienergie. Beim Gas ist die kinetische Energie am absoluten Temperaturnullpunkt $T = 0^\circ K$ Null, nicht so bei den Leitungselektronen im Metall: hier besitzen die freien Elektronen kinetische Energie! Die Energie, die den energiereichsten Elektronen noch fehlt, um das Metall zu verlassen, heißt Austrittsarbeit ϕ_0 . Anschaulich:

- Die Elektronen befinden sich in einem $E_F + \phi_0$ tiefen Potentialtopf
- Bei $T = 0^\circ K$ füllen die Elektronen den Potentialtopf vom Boden bis zur Höhe E_F .
- Bei höheren Temperaturen bleiben unterhalb E_F einige Zustände unbesetzt, während sich einige Elektronen oberhalb befinden.

Übersteigt die Energie eines Elektrons die Potentialtopftiefe, so kann es aus der Metalloberfläche austreten - die Glühemission tritt ein (Richardson-Effekt). Für viele austretende Elektronen erhalten wir einen Sättigungsstrom I_S , der im Experiment in Abhängigkeit der Heizleistung P gemessen werden soll. Es lässt sich allerdings auch eine Formel für I_S herleiten:

Aus quantenmechanischen Überlegungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, ergibt sich für die Anzahl der Elektronen dN im Geschwindigkeitsintervall dv_x, dv_y, dv_z :

$$dN = \frac{2 \cdot V \cdot m^3}{h^3} \cdot \frac{dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z}{\exp \left\{ \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \cdot \frac{m}{2} - E_F}{k_B \cdot T} + 1 \right\}} \quad (1)$$

Für $E - E_F > k_B \cdot T$ kann man nähern:

$$dN \approx \frac{2 \cdot V \cdot m^3}{h^3} \cdot \exp \left\{ \frac{E_F - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \cdot \frac{m}{2}}{k_B \cdot T} \right\} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z \quad (2)$$

Unter der Annahme, dass v_x in die Richtung der Flächennormalen zeigt und einige Elektronen eine ausreichend große kinetische Energie besitzen um austreten zu können gilt: $v_x \geq \sqrt{\frac{2 \cdot (E_F + \phi_0)}{m}}$. Von den in (2) ermittelten dN Elektronen verlässt dann der Anteil $\frac{dN \cdot v_x \cdot \Delta t \cdot \Delta A}{V}$ in der Zeit Δt die Oberfläche ΔA des Metalls. Pro Δt und ΔA werden also emittiert:

$$N(\Delta A, \Delta t) = \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \Delta A \cdot m^3}{h^3} \cdot e^{-\frac{\phi_0}{k_B \cdot T}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k_B^2 \cdot T^2}{m^2} \quad (3)$$

Die Stromdichte errechnet sich anschließend über folgenden Quotienten:

$$j = \frac{N(\Delta A, \Delta t) \cdot e}{\Delta A \cdot \Delta t} = \underbrace{\frac{4 \cdot \pi \cdot e \cdot m \cdot k_B^2}{h^3}}_{=: \varepsilon} \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{\phi_0}{k_B \cdot T}} \quad (4)$$

Der Strom berechnet sich mit $I = \int_A j \, dA$ - da in unserem Fall die Stromdichte auf der gesamten Fläche gleich ist, errechnet sich I_S über das Produkt von Heizfadenoberfläche A_k und Stromdichte j (Richardson-Gesetz):

$$I_S = A_k \cdot j = A_k \cdot \varepsilon \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{\phi_0}{k_B \cdot T}} \quad (5)$$

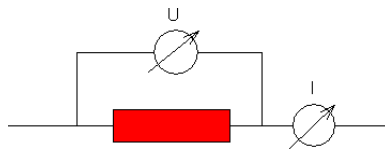
Die oben eingeführte Abkürzung ε hat übrigens den Namen Elektronenemissionsvermögen und hängt vom Material ab. Dieser Faktor gibt an, wie häufig Elektronen gegen die Oberfläche anrennen. $e^{-\frac{W}{k_B \cdot T}}$ berechnet außerdem die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, welches gegen die Oberfläche anläuft, die zur Ablösung notwendige Energie W besitzt. Die Gültigkeit des Richardson-Gesetzes lässt sich folgendermaßen überprüfen: Dividieren wir (5) durch T^2 und logarithmieren wir, so ergibt sich:

$$\ln\left(\frac{I_S}{T^2}\right) = -\frac{\phi_0}{k_B \cdot T} + \ln(A_k \cdot \varepsilon) \quad (6)$$

Trägt man also $\ln\left(\frac{I_S}{T^2}\right)$ über $\frac{1}{T}$ auf, müsste man eine Gerade erhalten. Ist dies der Fall, so haben wir die Gültigkeit des Richardson-Gesetzes experimentell nachgewiesen! Durch Vergleich von $y = m \cdot x + b$ mit (6) kann man mittels Steigung m und y-Achsenabschnitt b der Ausgleichsgeraden die geforderten Werte berechnen:

- Elektronenemissionsvermögen ε : $b = \ln(A_k \cdot \varepsilon) \Rightarrow e^b = A_k \cdot \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{e^b}{A_k}$
- Elektronenaustrittsarbeit ϕ_0 : $m = -\frac{\phi_0}{k_B} \Rightarrow \phi_0 = -m \cdot k_B$
 - Literaturwert für Wolfram: 4,54 eV

Im Versuch messen wir übrigens nicht die Temperatur T direkt, sondern Heizspannung U_{Heiz} und Heizstrom I_{Heiz} , berechnen $P_{Heiz} = U_{Heiz} \cdot I_{Heiz}$ und lesen aus der $T = f(P)$ -Kurve im Praktikumsraum die zugehörige Temperatur ab.

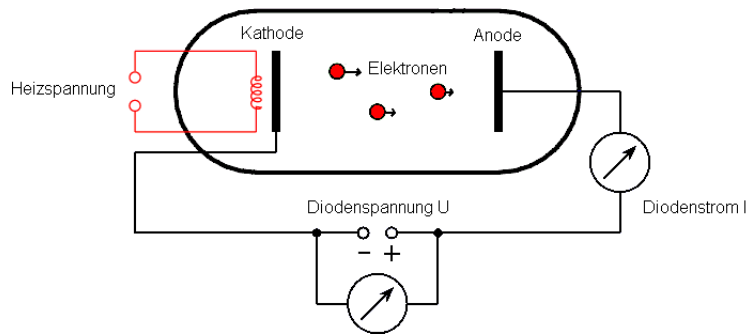


Hierbei gilt es allerdings zu berücksichtigen: da Strom und Spannung gleichzeitig gemessen werden müssen, ist es nicht möglich diese Messung „fehlerfrei“ durchzuführen. In diesem Fall soll eine spannungsrichtige Schaltung verwendet werden: direkt über dem Bauteil, dessen Leistung gemessen werden soll (in der Skizze rot markiert), wird das Spannungsmessgerät installiert. Es wird also der exakte Wert der Spannung registriert. Das Strommessgerät wird hinter diese Parallelschaltung aus Bauteil und Spannungsmessgerät geschaltet und misst deshalb nicht den tatsächlichen Strom durch das Bauteil, da ja ein Teil des Stroms aufgrund des endlichen Innenwiderstand des Spannungsmessgeräts auch durch das Messgerät fließt.

2 Diodenkennlinie, Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz und Schottky-Effekt

2.1 Diodenkennlinie

Schon im ersten Versuchsteil beobachteten wir die Glühemission anhand einer Vakuum-Diode, deshalb sei an dieser Stelle auf das Bauteil „Röhrendiode“ näher eingegangen. In einer vakuumierten Glasröhre befinden sich zwei Elektroden, die Glühkathode (heizbar über eine externe Heizspannung) und die Anode. Aus der Kathode treten durch Feldemission oder Glühemission Elektronen aus, die durch eine zwischen Anode und Kathode angelegte Spannung U zur Anode hin beschleunigt werden. Es lässt sich also der Diodenstrom I beobachten, obwohl der Stromkreis ja eigentlich unterbrochen ist.

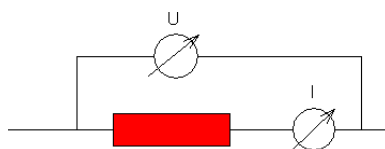


Polrt man die Spannung zwischen Anode und Kathode um, so ist dieser Stromfluss allerdings nicht zu beobachten. Es treten durch Glühemission zwar weiterhin Elektronen an der beheizten Elektrode aus, da aber die Gegenelektrode genau wie die Elektronen negativ geladen ist, fließt kein Strom - die Diode sperrt. Aufgrund dieses Effekts wurden Dioden früher als Gleichrichter eingesetzt, wenngleich sie inzwischen weitgehend durch Halbleitertechnik abgelöst wurden.

Fährt man die Spannung U zwischen Kathode und Anode von -3V an hoch, so erwarten wir folgenden Verlauf des Diodenstroms I :

- **Sperrbereich:** Bei umgekehrter Polung tritt kein Stromfluss auf, da die Elektronen wie oben beschrieben nicht gegen die starke Gegenspannung anlaufen können.
- **Anlaufbereich:** Bei kleinerer negativer Spannung gelingt es den schnellsten Elektronen, zur Anode zu fliegen, womit ein geringer Diodenstrom zu verzeichnen wäre. Die langsameren Elektronen halten sich zwischen Anode und Kathode auf, wir erhalten dort also eine Raumladung.
- **Raumladungsbereich:** Für eine positive Spannung werden die Elektronen aus dem Raumladungsbereich abgesaugt. Klar: je höher die angelegte Spannung, desto größer der gemessene Strom. Allerdings hängt der Diodenstrom auch von der Raumladung ab! Diesen Bereich untersuchen wir in 2.2.
- **Sättigungsbereich:** Für sehr große Spannungen werden alle austretenden Elektronen sofort abgesaugt, es bildet sich kein Raumladungsbereich aus. (Teilaufgabe 2.3)

Für diesen Versuch verwenden wir eine stromrichtige Schaltung. Hier messen wir den Strom der Diode exakt, während die Spannungsmessung fehlerbehaftet ist (wir messen nämlich die Reihenschaltung aus Diode und Strommessgerät, nicht die an der Diode anliegende Spannung alleine).



2.2 Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz

Eine Raumladung ist eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung, sprich: die Elektronen halten sich in einem räumlich abgegrenzten Gebiet auf. Für (nicht allzu große) positive Spannungen an der Diode bildet sich zwischen Anode und Kathode ein Raumladungsbereich, wie es ja auch schon in obiger Liste erläutert wurde. Die Raumladung hat allerdings auch auf das Feld zwischen Anode und Kathode Auswirkungen: einige Feldlinien enden nun nicht mehr an der Kathode, sondern schon an den Elektronen im Raumladungsbereich. An der Kathode ist die Feldstärke somit niedriger als vorher.

Zur Vereinfachung betrachten wir lediglich eine ebene Anordnung:

- planparallele Kathode und Anode mit Fläche A und Abstand d
- x bezeichne die Punkte zwischen Anode und Kathode, wir berücksichtigen also nur eine Raumrichtung
- E_{kin} der an der Kathode startenden Elektronen setzen wir Null.

In diesem Fall lautet die Poissonsche Potentialgleichung für das Potential φ und die Ladungsdichte ρ folgendermaßen:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \quad (7)$$

Das Potenzial an der Stelle x ist gerade die Summe aus dem Potenzial der Kathode und der Spannung $U(x)$ an der Stelle x , da wir uns ja zwischen dem „Plattenkondensator“ Kathode-Anode befinden:

$$\varphi(x) = \varphi_{Kathode} + U(x) \quad (8)$$

Beim Ableiten nach x fällt $\varphi_{Kathode}$ heraus, da es nicht von x abhängt bzw. ein konstanter Wert ist. (7) wird also zu:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \quad (9)$$

Das Produkt aus Ladungsdichte und Volumen ergibt logischerweise die Ladung ($\Rightarrow \rho(x) \cdot A \cdot s = q$). Der Strom I ist die zeitliche Ableitung der Ladung, also $I = \dot{q} = \rho(x) \cdot A \cdot v(x)$ mit der Geschwindigkeit $v(x)$ der Elektronen an der Stelle x . Da der Strom in unserem ebenen Fall auch gleich dem Produkt von Stromdichte und Fläche ist ($I = j \cdot A$), können wir folgern:

$$\rho(x) \cdot A \cdot v(x) = j \cdot A \quad (10)$$

$$\Rightarrow \rho(x) = \frac{j}{v(x)} \quad (11)$$

Eingesetzt in (9) erhalten wir:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\frac{j}{\varepsilon_0 \cdot v(x)} \quad (12)$$

Aufgrund der Kontinuität des Stroms ist die Stromdichte j von x unabhängig. Die kinetische Energie der Ladung an der Stelle x lässt sich auf zwei Arten berechnen: zum einen mit der Geschwindigkeit, zum anderen über die Beschleunigungsspannung. Also:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v(x)^2 = e \cdot U(x) \quad (13)$$

(13) aufgelöst nach $v(x)$ und eingesetzt in (12) ergibt:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\frac{j}{\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot e \cdot U(x)}} = \underbrace{-\frac{j}{\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot e}}}_{=: \kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{U(x)}} \quad (14)$$

Erweitern mit $2 \cdot \frac{dU(x)}{dx}$ liefert:

$$2 \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right)^2 = 2 \cdot \kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{U(x)}} \cdot \frac{dU(x)}{dx} \quad (15)$$

Erweitern und Integration von 0 bis x bzw. $U(x)$:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 2 \cdot \sqrt{\kappa} \cdot U^{\frac{1}{4}} \quad (16)$$

(16) löst man mit Trennung der Variablen:

$$\int_0^{U(x)} U^{-\frac{1}{4}} dU = \int_0^d 2 \cdot \sqrt{\kappa} dx \quad (17)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot U^{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \sqrt{\kappa} \cdot d \quad (18)$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot U^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

Den in (14) ausgeschriebenen Wert von κ einsetzen und nach j auflösen:

$$-\frac{j}{\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot e}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot U^{\frac{3}{2}} \quad (20)$$

$$\Rightarrow |j| = \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e}{m}} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot U^{\frac{3}{2}} \quad (21)$$

$$\Rightarrow I = j \cdot A_a = \underbrace{A_a \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e}{m}} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{d^2}}_{=:c} \cdot U^{\frac{3}{2}} \quad (22)$$

Dies ist das Langmuir-Schottkysche Raumladungsgesetz. Obwohl mit ebener Geometrie hergeleitet, gehen wir davon aus, dass es auch für den zylindrischen Versuchsaufbau Gültigkeit besitzt. Im Versuch messen wir nun den Zusammenhang zwischen Sättigungsstrom I und der Potentialdifferenz zwischen Kathode und Anode U . Logarithmieren von (22) ergibt:

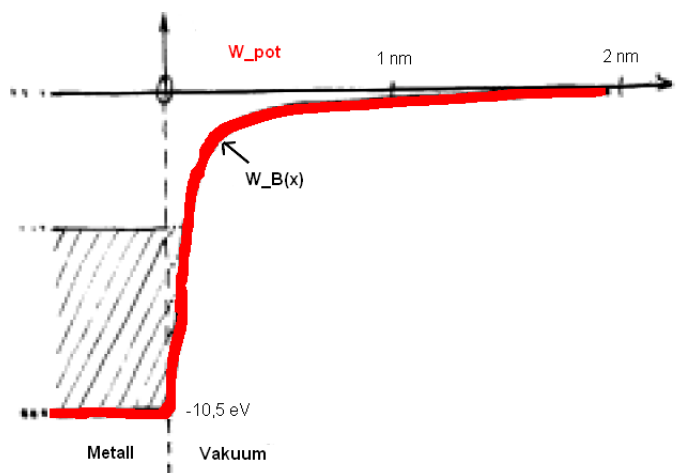
$$\ln I = \ln c + \frac{3}{2} \ln U \quad (23)$$

Wir sollten also eine Gerade erhalten, wenn wir den Logarithmus des Stroms über dem Logarithmus der Spannung auftragen. Die Steigung der Ausgleichsgeraden entspricht also gerade dem Exponenten von U , den wir auf diese Weise verifizieren können. Ist im Schaubild also eine Gerade mit Steigung $\frac{3}{2}$ zu erkennen, so können wir das Raumladungsgesetz als bestätigt ansehen.

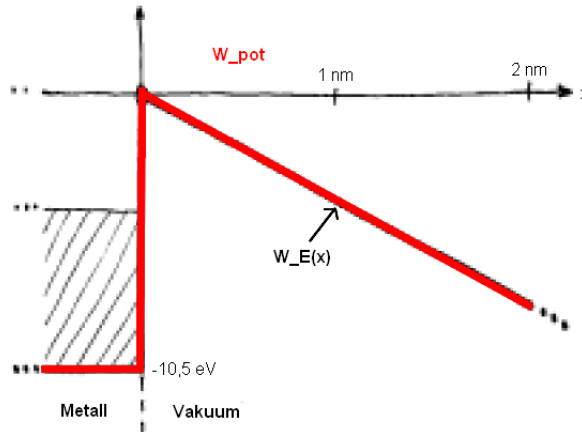
2.3 Schottky-Effekt

Für diesen Aufgabenteil muss das stark idealisierte Modell der Energieverhältnisse aus Aufgabe 1 modifiziert werden. Der Potentialsprung am Rand des Potentialtopfes ist in Wirklichkeit lange nicht so steil, denn auch außerhalb des Metalls werden die Elektronen von den Metallatomen angezogen. Diese sogenannte Bildkraft resultiert daher, dass ein Elektron auf der Oberfläche Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen influenziert, an dem die von ihm ausgehenden Feldlinien enden. Im Vakuum sieht das dann so aus, dass ob eine Spiegelladung e^+ im Metall existieren würde. Die zugehörige potenzielle Energie des Elektrons ist:

$$W_B(x) = -\frac{e^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x} \quad (24)$$



Ohne Bildkraft würde die potenzielle Energie des elektrischen Feldes außerhalb des Metalls linear abnehmen:



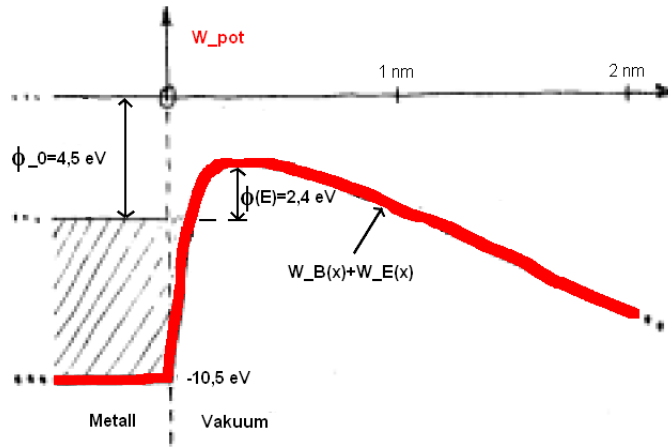
Es würde also die Formel

$$W_E(x) = -e \cdot E \cdot x \quad (25)$$

gelten. Überlagt man nun beide Effekte, so erhalten wir den Schottky-Effekt:

$$W_{pot} = -\frac{e^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x} - e \cdot E \cdot x \quad (26)$$

In der Skizze sieht man sehr schön, dass eine deutlich geringere Austrittsarbeit $\phi(E)$ vonnöten ist, als es ohne Feld der Fall wäre (ϕ_0).



Wie groß ist die Austrittsarbeit $\phi(E)$ aber nun genau? Hierzu suchen wir einfach das Extremum der Kurve, leiten also (26) nach x ab und setzen die Ableitung gleich Null.

$$\frac{e^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x^2} - e \cdot E = 0 \quad (27)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{e}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E}} \quad (28)$$

Die potentielle Energie am Extremum erhalten wir, wenn wir dieses x in (26) einsetzen:

$$W_{pot}(Extremum) = -\frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{e \cdot E}{\pi \cdot \epsilon_0}} \quad (29)$$

Aus der Zeichnung können wir die Beziehung für $\phi(E)$ ablesen (Schottky-Formel):

$$\phi(E) = \phi_0 - W_{pot}(Extremum) = \phi_0 + \frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{e \cdot E}{\pi \cdot \epsilon_0}} \quad (30)$$

Setzen wir die Austrittsarbeit $\phi(E)$ aus (30) an Stelle von ϕ_0 im Richardson-Gesetz (5), so ist folgender Sättigungsstrom zu erwarten:

$$I_S = A_k \cdot \epsilon \cdot T^2 \cdot \exp\left(-\frac{\phi_0 + \frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{e \cdot E}{\pi \cdot \epsilon_0}}}{k_B \cdot T}\right) \quad (31)$$

$$= A_k \cdot \epsilon \cdot T^2 \cdot \exp\left(-\frac{\phi_0}{k_B \cdot T}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{e \cdot E}{\pi \cdot \epsilon_0}}}{k_B \cdot T}\right) \quad (32)$$

Für das elektrische Feld E gilt wegen der Zylindersymmetrie der Spule:

$$E = \frac{U}{r_i \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}} \quad (33)$$

Einsetzen in (31) liefert:

$$I_S = \underbrace{A_k \cdot \epsilon \cdot T^2 \cdot \exp\left(-\frac{\phi_0}{k_B \cdot T}\right)}_{=: \alpha} \cdot \exp\left(\underbrace{-\frac{e}{2 \cdot k_B \cdot T} \cdot \sqrt{\frac{e}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_i \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}}}}_{=: \beta} \cdot \sqrt{U}\right) \quad (34)$$

Wir haben also die Formel auf die gewünschte Form gebracht:

$$I_S = \alpha \cdot e^{\beta \cdot \sqrt{U}} \quad (35)$$

Logarithmiert man (35), so erhält man:

$$\ln I_S = \ln \alpha + \beta \cdot \sqrt{U} \quad (36)$$

Für die Auftragung $\ln I_S$ über \sqrt{U} müssten wir also eine Gerade mit Steigung β und y-Achsenabschnitt $\ln \alpha$ erhalten. Um nun den theoretischen Wert für die Geradensteigung bzw. β zu erhalten, benutzen wir:

$$\beta = \frac{e}{2 \cdot k_B \cdot T} \cdot \sqrt{\frac{e}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_i \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}}} \quad (37)$$

Da in unserem Fall $r_i = 0,065 \text{ mm}$, $r_a = 0,875 \text{ mm}$ und $T = 2400 \text{ K}$ gelten, erhalten wir $\beta = 0,014$.

3 Feldemission, Fowler-Nordheim-Beziehung

In der Quantenmechanik ordnet man Elektronen (bzw. Teilchen allgemein) eine Wellenlänge zu, die DeBroglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$. Am Rand des Potentialtopfes tritt nun, quantenmechanisch betrachtet, folgendes Phänomen auf: ein Teil der Welle wird nicht reflektiert, sondern dringt mit exponentiellem Amplitudenabfall in den Potentialberg ein. Ist dieser nicht allzu breit, so besteht die Chance, dass das Elektron den Berg „durchtunneln“ kann - es den Potentialtopf also verlässt, ohne die eigentlich dafür notwendige Energie zu besitzen. Diese „Feldemission“ ist aufgrund höherer Stromdichten deutlich stärker als die Glühemission.

Die Fowler-Nordheim-Beziehung gibt diesen Effekt, bezogen auf die tatsächliche Form des Potentialbergs (letztes Bild in Aufgabe 2.3) exakt wieder. Sie besagt, dass für die Feldemissionsstromdichte j folgende Abhängigkeit zur Oberflächenfeldstärke E (die ja den „schmalen“ Potentialberg verursacht) gilt:

$$j = A \cdot E^2 \cdot e^{-\frac{B}{E}} \quad (38)$$

Dies entspricht:

$$I_S = A \cdot U^2 \cdot e^{-\frac{B}{U}} \quad (39)$$

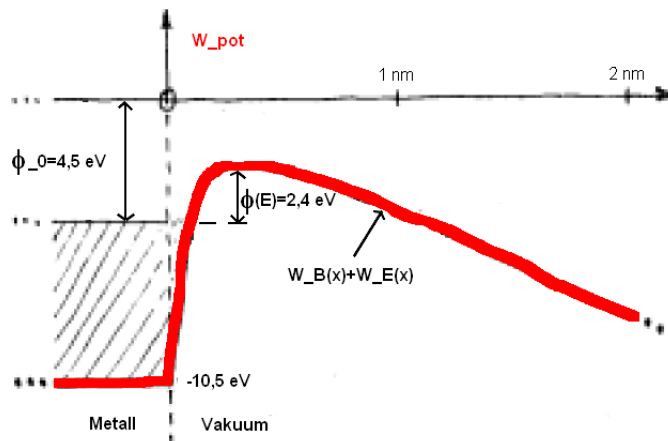
Um nun eine Darstellung in Geradenform zu erhalten, logarithmieren wir wieder (wobei wir zuvor durch U^2 teilen):

$$\ln \left(\frac{I_S}{U^2} \right) = \ln A - \frac{B}{U} \quad (40)$$

Eine Bestimmung der Parameter A und B ist in diesem Versuchsteil nicht sinnvoll, weshalb wir uns darauf beschränken sollen $\ln \left(\frac{I_S}{U^2} \right)$ über $\frac{1}{U}$ aufzutragen um dann lediglich zu verifizieren, ob wir eine Gerade - und damit die Bestätigung der Fowler-Nordheim-Beziehung - erhalten.

In 2.3 haben wir Formel (26) hergeleitet, die unseren Potentialberg beschreibt:

$$W_{pot} = -\frac{e^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x} - e \cdot E \cdot x \quad (41)$$



Wir sollen nun die Breite des Potentialbergs W_{pot} in der Höhe $-\phi_0 = -4,5$ V bestimmen. Hierzu benötigen wir die beiden Punkte x_1 und x_2 , an denen W_{pot} gerade $-4,5$ V ist, also:

$$W_{pot} \stackrel{!}{=} -\phi_0 \quad (42)$$

$$\Rightarrow -\underbrace{\frac{e^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}}_{=: \alpha} \cdot \frac{1}{x} - \underbrace{e \cdot E}_{=: \beta} \cdot x = -\phi_0 \quad (43)$$

Multiplikation mit $-x$ liefert:

$$\alpha + \beta x^2 = \phi_0 \cdot x \quad (44)$$

$$\Rightarrow \beta x^2 - \phi_0 \cdot x + \alpha = 0 \quad (45)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{\phi_0 \pm \sqrt{\phi_0^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \beta}}{2\beta} \quad (46)$$

Die Breite des Potentialbergs lautet also:

$$\Delta x = \frac{\sqrt{\phi_0^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \beta}}{\beta} \quad (47)$$

Bekannt sind:

- $\phi_0 = -4,5$ eV
- $\alpha = \frac{e^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$
- $\beta = e \cdot E$, wobei in unserem Fall aufgrund der Kathodengeometrie (Paraboloid) $E(U) = 2 \cdot \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R}{r}}$ gilt, woraus folgt: $\beta = e \cdot 2 \cdot \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R}{r}}$

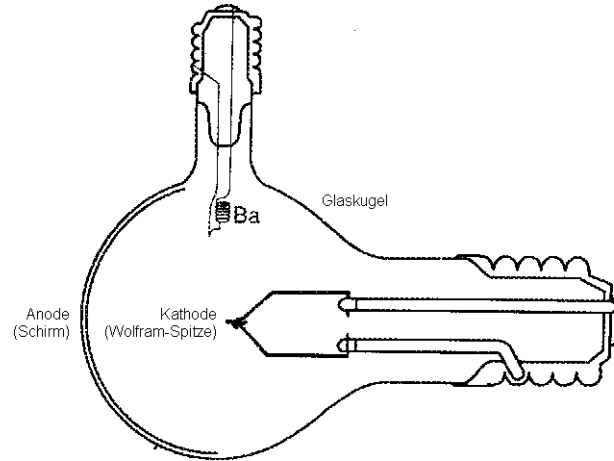
Mit (47) ist im Versuch die Potentialbergbreite zu bestimmen und mit der DeBroglie-Wellenlänge der Elektronen $\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot U}}$, für 6 eV-Elektronen $\lambda = 501$ pm, zu vergleichen. Theoretisch errechneten wir folgende Werte ($r = 0,2 \mu m$ und $R = 5$ cm waren gegeben):

U in kV	3	4	5	6
Δx in nm	1,74	1,26	0,97	0,78

Wir erwarten also für hohe Spannungen eine Annäherung an die DeBroglie-Wellenlänge 500 pm!

4 Feldemissions-Mikroskop

Eine mögliche Anwendung des Effekts der Feldemission ist das Feldemissions-Mikroskop: Eine extrem feine Wolfram-Spitze sitzt als Kathode im Zentrum einer hochevakuierten Glaskugel. Als Anode dient ein Fluoreszenzschirm auf der Innenseite der Kugel. Nach dem Anlegen einer Hochspannung zwischen Anode und Kathode treten per Tunneleffekt (also Feldemission) Elektronen aus der kalten Wolfram-Spitze aus und gelangen radial zum Leuchtschirm, der sie sichtbar werden lässt. Da die Austrittsarbeit der Elektronen für die verschiedenen Kristallflächen des Wolframs unterschiedlich ist, erscheinen auf dem Schirm helle und dunkle Gebiete. Die Struktur der Kathode wird somit sichtbar!

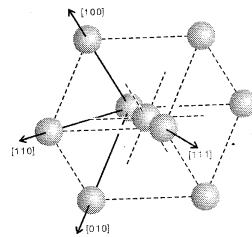


Auf diese Weise lassen sich kleinste Gegenstände, die mit einem normalen Lichtmikroskop nicht mehr abgebildet werden können (wie eben die durch Ätzen hergestellte Wolfram-Spitze) groß auf dem Schirm sichtbar machen. Der Vergrößerungsfaktor ist bedingt durch die Geometrie:

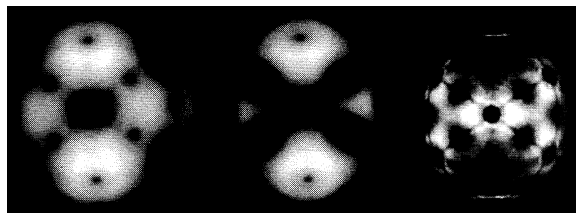
$$V = \frac{R}{r} \quad (48)$$

Hierbei bezeichnet R den Radius des Leuchtschirms (in unserem Fall 4 cm) und r den Radius der zu untersuchenden kugelförmigen Wolfram-Spitze ($\approx 0,1 - 0,2 \mu\text{m}$). Der Vergrößerungsfaktor unserer Anordnung beträgt also $V = 200.000$ bis $V = 400.000$!

Im Handbuch des Feldemissions-Mikroskop ist der schematische Aufbau der Elementarzelle eines Wolfram-Gitters abgedruckt, ebenso wie die zu erwartenden Mikroskopbilder. Im Versuch versuchen wir diese zu erzeugen und mit einer Digitalkamera festzuhalten.



Elementarzelle des Wolfram-Gitters



Abbild der Wolfram-Spitze direkt nach dem Ausheizen, nach ca. 3 Minuten und nach Barium-Bedampfung