

Versuch:

# Elektronenspinresonanz

*Korrektur*

Versuchsdurchführung: 06.11.2006

**Vorbemerkung**

An dieser Stelle wird der Abschnitt **3.5** korrigiert. Als Anmerkung sei noch hinzugefügt, dass man nicht, wie in **1.3** behauptet, alle Elektronen in einem Zwei-Niveau-System gleichzeitig anregen kann; die Gleichverteilung stellt die Obergrenze dar.

Wir werden nun im Folgenden die Fehlerrechnung etwas umstellen und auch die Größtfehlerbetrachtung modifizieren. Diese wurde, aufgrund eines Missverständnisses, mit einem unnötigen Zusatzterm „aufgepöppelt“. Dieser ergab sich daher, dass wir die Inhomogenität des Magnetfeldes berücksichtigen wollten, wobei uns allerdings entgangen war, dass diese Inhomogenität schon in die Betrachtung Eingang gefunden hatte - in Form der Unbestimmtheit des Eichfaktors für das  $B$ -Feld. Somit entfällt der zusätzliche Term und wir erhalten als Korrektur von (23):

$$\Delta g_{sys} = \left| \frac{\partial g}{\partial \nu} \right| \cdot \Delta \nu + \left| \frac{\partial g}{\partial U} \right| \cdot \Delta U + \left| \frac{\partial g}{\partial R} \right| \cdot \Delta R + \left| \frac{\partial g}{\partial a} \right| \cdot \Delta a \quad (1)$$

**3.5 Bestimmung des  $g$ -Faktors**

Wie gesagt sollte nun die Magnetfeldabhängigkeit der Resonanzfrequenz untersucht werden. Dafür wurden alle drei Spulen benutzt, da jede die Messung in einen anderen Frequenzbereich zuließ. Die Probe wurde in die Spule gesteckt, dann wurde eine Frequenz eingestellt. Nun wurde mittels der sogenannten Cursorfunktion die Stelle des Maximums des ESR-Peaks angesteuert und dann auf den entsprechenden Wert des Magnetfeldes (natürlich genauer: der Spannung, die über dem  $1\Omega$ -Widerstand abgegriffen wurde) gesprungen. Dann wurden dieser Wert und die Frequenz notiert (ähnlich der graphischen Darstellung in Aufgabe 1.5). Die Messergebnisse samt Zwischenergebnissen der Fehlerrechnung sind im Anhang zu finden. Aus der notierten Spannung kann mittels (10) die Stärke des  $B$ -Feldes gewonnen werden. Aus der graphischen Darstellung ist unmittelbar ersichtlich, dass der in (11) postulierte lineare Zusammenhang zweifelsfrei verifiziert ist:

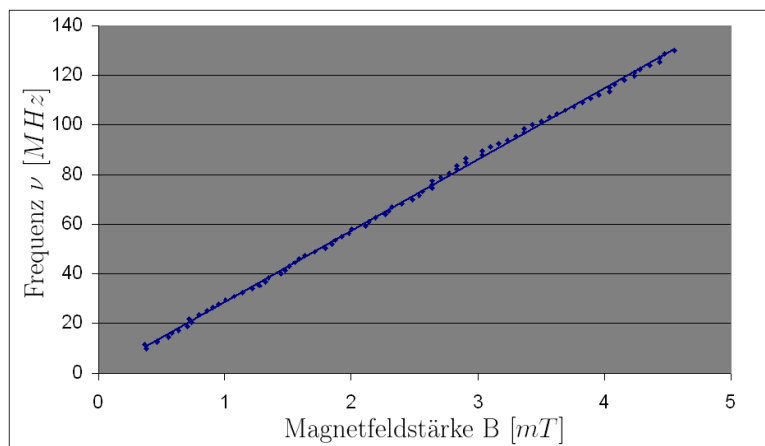


Abb.1: Magnetfeldabhängigkeit der Resonanzfrequenz

An dieser Stelle hatten wir nun ursprünglich vor, die Auswertung dieser Messreihe, die ja eigentlich aus drei Teilmessungen besteht, sowohl im Ganzen als auch mit den drei Teilmessreihen durchzuführen. Wie wir allerdings schon in der ursprünglichen Fassung diskutiert hatten, ist der Erkenntniswert der Gesamtuntersuchung eher gering, da es sich um eine zusammengesetzte Messung handelt. Die damals angegebene Vorgehensweise, man könne ja zunächst mal ausrechnen, wie genau das Ergebnis ist und daran den Sinn des Verfahrens der Gesamtauswertung zu prüfen, wurde berechtigterweise kritisiert. Deshalb erscheint es sinnvoller, statt einer gemeinsamen Betrachtung aller Werte lieber die Einzelbetrachtungen durchzuführen und dann auf der Grundlage dieser einen Mittelwert für den  $g$ -Faktor anzugeben. Die drei zu untersuchenden Teilbereiche sahen folgendermaßen aus:

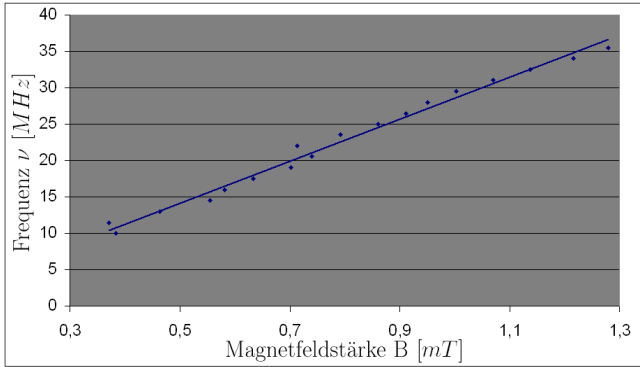


Abb.2: Große Spule

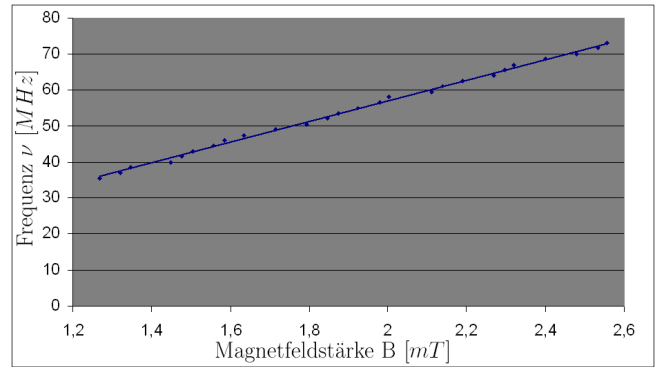


Abb.3: Mittlere Spule

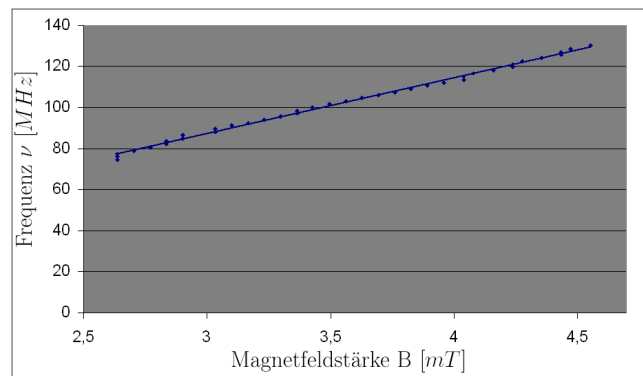


Abb.4: Kleine Spule

Wie bereits näher erläutert wurde, gilt die folgende Beziehung für die Steigung  $m$  der in Abbildung 2 bis 4 dargestellten Geraden:

$$m = \frac{g \cdot \mu_B}{h} \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{m \cdot h}{\mu_B} \quad (2)$$

Wenn wir den Fehler der Steigung von  $m$  berechnen, haben wir so auch gleichzeitig schon den Fehler des zu bestimmenden Parameters  $g$  gegeben, denn die Konstanten  $\mu_B$  und  $h$  sind nicht fehlerbelastet (dies ist auch mathematisch leicht einzusehen, wenn man in die entsprechende Fehlerfortpflanzungsformel einsetzen würde). Mittels der Formeln (13) bis (19) ergeben sich nun (Rechnungen: s.Anhang) die folgenden Werte (Literaturwerte:  $\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{Am}^2$  und  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ ).

Hierbei ist anzumerken, dass wir nun die Gesamtbetrachtung außen vor lassen und uns stattdessen im Anschluss den Mittelwert der drei Messungen anschauen.

Spule	Größe	errechneter Wert	Einheit	berechnet mit ...
kleine	$\sigma_m$ (abs)	0,268	MHz pro mT	Formel (16)
	$\sigma_m = \sigma_g$ (rel)	0,010	-	Formel (18)
	$g$ -Faktor	1,938	-	Formel (22)
	$\sigma_g$ (abs)	0,019	-	
mittlere	Steigung $m$	28,598	MHz pro mT	Formel (13)
	$\sigma_m$ (abs)	0,294	MHz pro mT	Formel (16)
	$\sigma_m = \sigma_g$ (rel)	0,010	-	Formel (18)
	$g$ -Faktor	2,043	-	Formel (22)
	$\sigma_g$ (abs)	0,021	-	
große	Steigung $m$	28,786	MHz pro mT	Formel (13)
	$\sigma_m$ (abs)	0,797	MHz pro mT	Formel (16)
	$\sigma_m = \sigma_g$ (rel)	0,028	-	Formel (18)
	$g$ -Faktor	2,057	-	Formel (22)
	$\sigma_g$ (abs)	0,057	-	

Der Eindruck, der sich durch die Betrachtung der Graphen ergibt, erhärtet sich hier - die Messung war sehr präzise ausgeführt. Die relativen Fehler überschreiten gerade einmal knapp die 2% Grenze. Die geringen Werte für die relativen Fehler und das Ergebnis die (wie wir später sehen werden) recht geringe Abweichung vom Literaturwert, lassen darauf schließen, dass wir es mit einer Messapparatur und -methode zu tun haben, die uns eine gute Messung des zu untersuchenden physikalischen Sachverhalts ermöglicht.

Nun wollen wir noch den Mittelwert der drei Messungen ermitteln. Für diesen gilt schlichterweise:

$$\bar{g} = \frac{1}{3} \cdot (g_{\text{kleine}} + g_{\text{mittlere}} + g_{\text{grosse}}) \quad (3)$$

Es stellt sich dann allerdings die Frage, wie sich die Fehler dieser drei Werte verhalten. Hierzu ziehen wir die allgemeine Fehlerfortpflanzung zu Rate, welche uns

$$\sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial g_{\text{kleine}}}\right)^2 \cdot \sigma_{g_{\text{kleine}}}^2 + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial g_{\text{mittlere}}}\right)^2 \cdot \sigma_{g_{\text{mittlere}}}^2 + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial g_{\text{grosse}}}\right)^2 \cdot \sigma_{g_{\text{grosse}}}^2} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\sigma_{g_{\text{kleine}}}^2 + \sigma_{g_{\text{mittlere}}}^2 + \sigma_{g_{\text{grosse}}}^2} \quad (5)$$

liefert. Somit können wir errechnen:

$$\bar{g} = 2,013, \quad \sigma_{\bar{g}}(\text{abs}) = 0,021$$

Bevor wir nun Endergebnisse festhalten und mit dem Literaturwert vergleichen, sollten wir noch eine Größtfehlerabschätzung durchführen, um die messtechnischen Fehler zu berücksichtigen. Mögliche Fehlerquellen sind die Fehler der verwendeten Konstanten, Ablesefehler, Inhomogenitäten, Verunreinigungen der Probe und eventuell Leitungsprobleme der Kabel. Wie sehen nun also die Fehler im Einzelnen aus? Als konkret angebbare Fehler finden wir die Fehler bei der Messung der Spannung über dem Widerstand, der Fehler des Widerstandes selbst, der Fehler des Eichfaktors (in dem, wie eingangs erwähnt, die Magnetfeldinhomogenität enthalten ist) und der Fehler für die Frequenz. Im Einzelnen schätzen wir folgendermaßen ab:

- $\Delta\nu = 0,05\text{MHz}$ , da die Frequenz nur auf die erste Stelle genau angegeben wurde.
- $\Delta a = 2\% \cdot 3,96 \frac{\text{mT}}{\text{A}}$ , dieser Wert entspringt den Angaben des Betreuers.
- $\Delta R = 0,01\Omega$ , wobei wieder kein Fehler angegeben ist. Da es sich jedoch um ein industriell gefertigtes Teil handelt, ist ein Fehler von 1% realistisch.
- $\Delta U = 10\text{mV}$ , wobei dies sehr schwer abzuschätzen ist. Ganz klein darf dieser Fehler allerdings nicht sein, aufgrund der Cursorproblematik (s. 3.6).

Somit ergibt sich nach (23):

$$\Delta g_{sys} = \left| \frac{\partial g}{\partial \nu} \right| \cdot \Delta \nu + \left| \frac{\partial g}{\partial U} \right| \cdot \Delta U + \left| \frac{\partial g}{\partial R} \right| \cdot \Delta R + \left| \frac{\partial g}{\partial a} \right| \cdot \Delta a \quad (6)$$

$$= \left| \frac{h}{\mu_B \cdot \frac{U}{R} \cdot a} \right| \cdot 0,05 MHz + \left| -\frac{\nu \cdot h}{\mu_B \cdot \frac{U^2}{R} \cdot a} \right| \cdot 10mV + \left| \frac{\nu \cdot h}{\mu_B \cdot U \cdot a} \right| \cdot 0,01 \Omega \quad (7)$$

$$+ \left| -\frac{\nu \cdot h}{\mu_B \cdot \frac{U}{R} \cdot a^2} \right| \cdot 0,02 \cdot a \quad (8)$$

$$= \frac{h}{\mu_B \cdot 0,00396 \frac{T}{A}} \cdot \left( \frac{1 \Omega}{U} \cdot 0,05 MHz + \frac{1 \Omega \cdot \nu}{U^2} \cdot 10mV + \frac{\nu}{U} \cdot 0,01 \Omega + \frac{\nu \cdot 1 \Omega}{U} \cdot 0,02 \right) \quad (9)$$

Da wir nun eine Größtfehlerabschätzung machen möchten, müssen wir, dem Namen nach, die Werte einsetzen, für die der Ausdruck von  $\Delta g_{sys}$  maximal wird. Dann haben wir eine obere Schranke für den systematischen Fehler bestimmt. Setzt man ein, so erhält man, wieder aufgeschlüsselt für die einzelnen Messbereiche:

Spule	$sup \Delta g_{sys}$ (abs)	bestimmt mit Wertepaar ( $\nu/U/B$ ):
kleine	0,092	(74,5MHz/0,666V)
mittlere	0,125	(35,5MHz/0,320V)
große	0,257	(10,0MHz/0,097V)

Dies sieht natürlich zunächst sehr dramatisch aus - immerhin entspräche der maximale Fehler mehr als 10%. Allerdings muss man berücksichtigen, dass wir vom Supremum, also der kleinsten oberen Schranke sprechen - der wirkliche Fehler kann weit darunter liegen. Des Weiteren ist dieses Supremum mit dem Wert berechnet, der den Fehler maximal macht; betrachtet man die Wertepaare, mit denen gerechnet wurde, so erkennt man, dass die sehr geringe Spannung bei 10MHz den Ausschlag für den großen Fehler liefern. Da bei den meisten Werten die Spannung aber deutlich höher ist als bei 10MHz, geben die maximalen Fehler der mittleren und kleinen Spule ein realistisches Bild der Größe der möglichen systematischen Fehler. Für den Mittelwert ergibt sich etwa ein Wert von 0,158. Des Weiteren lässt sich anmerken, dass diese Korrektur für die Genauigkeit unseres Messergebnisses durchaus positiv ist - schließlich lassen wir nun einen Term weg, der sich (bei Betrachtung der alten und neuen Werte) deutlich bemerkbar gemacht hat. Wir gewinnen also durch diese Korrektur deutlich (0,313 zu 0,257). Somit können wir als Endergebnis angeben:

Spule	Messergebnis
kleine	$g = 1,938 \pm 0,019 \pm 0,092$
mittlere	$g = 2,043 \pm 0,021 \pm 0,125$
große	$g = 2,057 \pm 0,057 \pm 0,257$
Mittelwert	$\bar{g} = 2,013 \pm 0,021 \pm 0,158$

Vergleichen wir nun die Ergebnisse. Zunächst wird deutlich, dass sich eine Messung mit der mittleren und kleinen Spule am meisten anbietet, weil die systematischen Fehlerquellen minimiert werden. Die Messung wurde im Allgemeinen sehr präzise durchgeführt, wodurch nur kleine statistische Abweichungen zu beklagen sind.

Wie in der Vorbereitungsmappe schon erwähnt, kann in einem Festkörper die Bahnbewegung stark mit den elektrischen Feldern des Kristalls wechselwirken und sich vom Spin entkoppeln („quenching“). Je vollständiger diese Entkopplung ist, desto mehr nähert sich der  $g$ -Faktor dem des freien Elektrons, dessen  $g$ -Faktor wir aufgrund von quantenelektrodynamischen Effekten schon als etwa 2,0023 angegeben hatten. Bei unserer Probe DPPH findet genau dieses quenching statt, weshalb man als Literaturwert auch 2,0036 findet.

Vergleichen wir mit unseren Messwerten, so ergibt sich eine erstaunliche gute Übereinstimmung: wir haben Abweichungen von 3,3% (kleine Spule), 2,0% (mittlere Spule) und 2,7% (große Spule). Da wir nun auch den Mittelwert errechnet haben, bleibt uns freudig festzustellen, dass dieser lediglich um 0,5% abweicht! Somit können wir sehr zufrieden sein und konstatieren, dass wir sowohl präzise als auch genau gemessen haben.