

Versuch: Gitterschwingungen

Versuchsdurchführung: 04.12.2006

Ziel des Versuchs

Da grundsätzlich kein Teilchen absolut in Ruhe ist, werden wir auch in von uns oft idealisiert als starr angesehenen Strukturen, wie etwa Kristallen, Bewegungen, der den Kristall bildenden Atome vorfinden. Auch können wir die Atome zu einer Schwingung anregen. Das Ziel dieses Versuchs besteht nun darin, sich die Vorgänge in einem schwingenden Kristallgitter anhand eines Modells zu veranschaulichen - der linearen Kette, welche uns einen Einblick in die Schwingungsprozesse im Gitter liefern sollte.

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	2
1.1	Einführung, Beschreibung eines Gitters	2
1.2	Gitterdynamik	3
1.3	Schwingung der eindimensionalen, einatomigen Kette	5
1.4	Schwingung der eindimensionalen, zweiatomigen Kette	7
1.5	Resonanz	8
1.6	Gütefaktor	9
1.7	Schallgeschwindigkeit	9
1.8	Phononen	9
2	Aufbau	9
2.1	Apparatur	9
2.2	Aufgaben	10
3	Durchführung	10
3.1	Eigenfrequenzen der einatomigen Kette	10
3.2	Eigenfrequenzen der zweiatomigen Kette	10
3.3	Resonanzkurve	10
3.4	Kettenlänge und Schallgeschwindigkeit	11
4	Auswertung	11
4.1	Dispersionsrelation	11
4.1.1	Dispersionsrelation der einatomigen Kette	11
4.1.2	Dispersionsrelation der zweiatomigen Kette	13
4.2	Massenverhältnis der zweiatomigen Kette	14
4.3	Bestimmung der Federkonstante	16
4.4	Bestimmung der zweiten Masse M	17
4.5	Schallgeschwindigkeit	18
4.5.1	Schallgeschwindigkeit der einatomigen Kette	19
4.5.2	Schallgeschwindigkeit der zweiatomigen Kette	19
4.6	Resonanzkurve und Gütefaktor	21
5	Anhang	23
5.1	Messprotokoll	23
5.2	Darstellung der Eigenschwingungen	25
5.3	bearbeitete Messdaten	27

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Einführung, Beschreibung eines Gitters

Da sich dieser Versuch im Bereich der Festkörperphysik abspielt, scheint es angebracht, einige Grundlagen zu wiederholen. Gehen wir zunächst darauf ein, wie wir eine periodische Struktur, wie etwa einen Kristall, beschreiben können. Hierfür koppelt man schlicht ein mathematisches Konstrukt, nämlich ein *Punktgitter*, mit einer sog. *Basis*, welche man sich als ein „Baustein“ des Kristalls vorstellen kann. Diese Basis ist physikalischer Natur - sie hat eine Ausdehnung, es kann sich um ein einzelnes Atom handeln oder um ganze Verbände von Atomen, es hat schlicht viele verschiedene Eigenschaften. Die Kopplung dieses mathematischen und physikalischen Konzepts ergibt das Kristall. Wie beschreiben wir dieses Gitter nun?

Zunächst wählen wir uns sog. *elementare Translationsvektoren* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, welche eine Basis des Gitters bilden (hier ist wichtig, dass jetzt von einer Basis mehr im Sinne einer Basis in einem Vektorraum gesprochen wird, nicht mehr im obigen Sinne von Atomen). Mit den so gewählten Vektoren kann man jeden Gitterpunkt innerhalb unseres mathematischen Gitters durch einen Vektor \vec{R} erreichen, welcher sich durch Linearkombination der Basisvektoren ergibt:

$$\vec{R} = n_1 \cdot \vec{a}_1 + n_2 \cdot \vec{a}_2 + n_3 \cdot \vec{a}_3 \quad (1)$$

wobei $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ die Koordinaten von \vec{R} bzgl. der Basis darstellen. Diese von uns so definierten Basisvektoren spannen nun ein Parallelepiped auf (die sog. *Elementarzelle*), mit welchem man den ganzen Raum erfüllen kann. Verständlicherweise ist die Wahl der Basisvektoren nicht eindeutig, weshalb es sich empfiehlt spezifischer zu werden. So nennen wir die Elementarzelle mit dem kleinsten Volumen die *primitive Einheitszelle*.

Des Weiteren kann man Gitter in verschiedene Gruppen einteilen, welche abhängig von ihrer Symmetrie sind. So kann man logischerweise bei jedem Gitter Translationssymmetrie um einen beliebigen Gittervektor annehmen, immerhin ist das Gitter ja periodisch. Dann gibt es weitere Symmetrieeoperationen, welche bestimmte Gitter in sich selbst überführen, andere Gitter aber nicht. Dazu zählen Spiegelungen, Inversionen, Rotationen und so weiter. Teilt man nun systematisch die verschiedenen Gittertypen nach Symmetrie auf, so erhält man 14 verschiedene Gittertypen, welche als *Bravais-Gitter* bezeichnet werden.

Nun haben wir also eine Möglichkeit an der Hand, wie wir recht gut die dem Kristall zugrunde liegende mathematische Struktur des Punktgitters beschreiben können. Wie wir im Verlauf des Versuchs sehen werden, macht es allerdings Sinn, sich neben diesem Gitter im Ortsraum noch ein Punktgitter im sog. *reziproken Raum*, das *reziproke Gitter* zu definieren. Dieses wird aufgespannt von den Vektoren \vec{b}_i , welche folgendermaßen gebildet werden:

$$\vec{b}_1 = 2\pi \cdot \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \quad (2)$$

wobei dann für \vec{b}_2 und \vec{b}_3 zyklisch durchpermutiert wird. Für diese Definition gibt es auch eine anschauliche Überlegung: wir betrachten eine Menge von Punkten, welche ein Bravais-Gitter bilden und eine ebene Welle. Für gewisse Werte des Wellenvektors \vec{k} (die vom konkreten Gitter abhängen) wird die ebene Welle die Periodizität des Bravais-Gitters besitzen. Deshalb kann man nun anschaulich das reziproke Gitter des Bravais-Gitters als die Menge aller Wellenvektoren \vec{K} auffassen, die ebene Wellen mit der Periodizität eines gegebenen Bravais-Gitters erzeugen.

Im Folgenden werden wir uns mit Gebilden im reziproken Raum beschäftigen, welche später für die von uns zu untersuchenden Dispersionsrelationen wichtig sein werden: den *Brillouin-Zonen*. Bauen wir zunächst unser Verständnis des reziproken Raumes aus: Natürlich können wir auch hier wieder jeden Punkt mittels der Koordinaten $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{Z}$ bzgl. der Basis im reziproken Raum darstellen:

$$\vec{G} = h_1 \vec{b}_1 + h_2 \vec{b}_2 + h_3 \vec{b}_3 \quad (3)$$

Unter Beachtung der Definitionen lassen sich dann auch leicht folgende Eigenschaften nachvollziehen:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi \cdot \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

$$\vec{R} \cdot \vec{G} = 2\pi \cdot (n_1 h_1 + n_2 h_2 + n_3 h_3) \quad (5)$$

Kommen wir nun zu den bereits angesprochenen Brillouin-Zonen. Die erste Zone wird definiert als Menge der Punkte des reziproken Raumes, welche dem Ursprung näher liegen als allen anderen Punkten \vec{G} . Die Konstruktion dieser Zone entspricht genau der der *Wigner-Seitz-Zelle* im Ortsraum, welche gebildet wird, indem man (in 2-dim) die Mittelsenkrechten auf die Verbindungsstrecken zwischen Ursprung und dem nächsten Gitterpunkt zeichnet und auf diese Weise mit allen umliegenden Punkten verfährt. Die sich schneidenden Geraden beranden ein Vieleck, dessen innere Punkte dem Ursprung näher sind als allen anderen Gitterpunkten. Erweitert man diese Konstruktion auf drei Dimensionen, so hat man es statt mit Geraden schlicht mit Ebenen zu tun, welche wiederum eine Menge von entsprechenden Punkten einschließen. Hier zwei Beispiele aus Ashcroft/Mermin: Festkörperphysik (S.112):

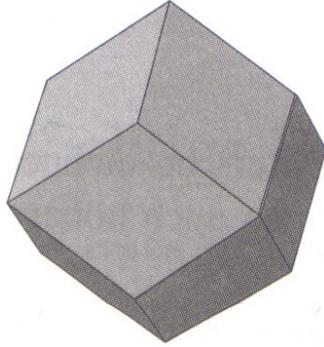


Abb.1: 1.Brillouin-Zone, kubisch-raumzent. Gitter

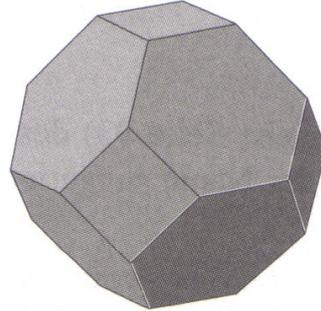


Abb.2: 1.Brillouin-Zone, kubisch-flächenzent. Gitter

Da die Dimension der reziproken Gittervektoren mit der des \vec{k} -Vektors übereinstimmt, bezeichnet man den reziproken Raum oft auch als *k-Raum*. Wenn wir eine einfache kubische Kristallstruktur betrachten, welche die Gitterkonstante a habe, so ist die erste Brillouin-Zone des reziproken Raumes durch

$$-\frac{\pi}{a} \leq k_i \leq \frac{\pi}{a} \quad (6)$$

($i = x, y, z$) abgegrenzt.

1.2 Gitterdynamik

Nach dieser Einführung in die Grundlagen des Kristallgitters, wollen wir uns nun daran machen, eine Schwingung innerhalb eines Festkörpers näher zu beschreiben. Denken wir uns ein Atom im Kristallverbund, welches um einen gewissen Betrag ausgelenkt sei. Welchen Kräften unterliegt nun dieses Atom? Hierbei sind natürlich grundsätzlich die verschiedenen Bindungstypen zu erwähnen, welche maßgeblich von der Struktur der Basis abhängen (i.d.Fall: Basis nicht die des Vektorraumes, sondern die physikalische des Kristalls): Kovalente Bindung, Ionische Bindung, van-der-Waals-Bindung - um nur einige zu nennen. Ganz unabhängig von der Wahl der Basis existieren allerdings noch die Gravitationskraft (nur anziehend) und die Coulombkraft (anziehend und abstoßend). Wie man mittels einer kleinen Beispielrechnung für ein Atom leicht einsieht, übersteigt die Coulombkraft zwischen Elektron und Atomkern die Gravitationskraft der beiden Teilchen um ein Vielfaches, weshalb wir also im Folgenden die Gravitationskraft problemlos und gerechtfertigt vernachlässigen können. Wir können also feststellen, dass die Gitteratome im Wesentlichen über die Coulombkräfte der Bindungselektronen miteinander gekoppelt sind. Mit einem so schwingungsfähigen System (der Atomrumpf im Potential der Bindungselektronen) können sich nun *Kristallwellen* ausbreiten. Diese Erkenntnis bringt uns allerdings auf unserem Weg zur Beschreibung einer Schwingung im Gitter nur bedingt weiter - immerhin müssten wir nun die Coulomb-Wechselwirkung sehr vieler Atome im größeren Umkreis eines Atoms berücksichtigen, was uns auf ein analytisch kaum lösbares Vielkörperproblem führt.

Um dieses Vielkörperproblem zu umgehen, werden wir nun Näherungen begründen, die das Problem deutlich vereinfachen und es uns ermöglichen, in diesem Praktikumsversuch ein mechanisches Modell zu untersuchen.

✧ Gleichgewichtslage

Wir gehen davon aus, dass die *mittlere* Gleichgewichtslage eines jeden Atomrumpfes mit seinem Platz im Bravais-Gitter übereinstimmt. Dadurch können wir den Atomrumpf weiterhin lokalisieren, wenn auch nur im Mittel die Position des Atomrumpfes mit der des Gitterpunkts identisch ist.

✧ Atomausmaße

Zur Vereinfachung der Situation nehmen wir weiterhin an, dass sich die Atomkerne, in denen der wesentliche Teil der Masse des Atoms befindet, als punktförmig nähern lassen. Dies ist gerechtfertigt, da die Ausmaße des Atoms wesentlich von den Hüllenelektronen bestimmt werden, die allerdings im Verhältnis nur einen Bruchteil der Masse tragen.

✧ Die harmonische Näherung

Wir nehmen hier an, dass die Auslenkungen der Atomrumpfe aus ihren Gleichgewichtslagen klein im Verhältnis zum Abstand zwischen zwei Atomrumpfen sind. Dies führt zur sog. *harmonischen Näherung* (wobei einige Phänomene der Festkörperphysik nur unter Zuhilfenahme der anharmonischen Theorie beschrieben werden können). Auch ohne die daraus resultierenden Schritte zur analytischen Beschreibung des Potentials (Taylor-Entwicklung, dynamische Matrix ...), können wir diese Näherung anschaulich machen:

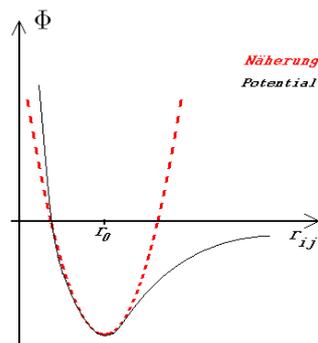


Abb.3: Harmonische Näherung

Hier wird also die Potentialkurve durch eine quadratische Funktion angenähert, deren Minimum mit dem Minimum des an der Stelle des Gleichgewichtsabstands übereinstimmt.

✧ Kopplung entfernter Nachbarn

Da wir unser Problem von sehr vielen Körpern auf recht wenige reduzieren wollen, wenden wir die Näherung an, dass weiter entfernt liegende Atome, namentlich alle außer den nächsten Nachbarn, keinen Einfluss auf das zu betrachtende Atom haben. Die dabei vernachlässigten Terme sind auch deshalb wirklich klein, da die Coulombkraft quadratisch mit dem Abstand abnimmt, sodass die übernächsten Nachbarn nur noch einen kleinen Teil im Vergleich zu den nächsten Nachbarn ausmachen. Da wir uns des Weiteren in einem periodischen Kristall befinden, indem in jede Richtung viele Teilchen um das zu betrachtende Atom herum sind, findet auch eine Abschirmung durch die anderen Teilchen statt.

✧ Lineare Kette

Um die Ausbreitung nun adäquat beschreiben zu können, ist eine dreidimensionale Abhängigkeit mit sehr vielen nächsten Nachbarn hinderlich, weshalb man das Problem der in Netzebenen schwingenden Atome auf ein eindimensionales Problem reduziert. Berücksichtigen wir also ausschließlich Kräfte zwischen nächsten Nachbarn, so beschreibt die harmonische Näherung für das nun eindimensionale Bravais-Gitter ein Modell, in welchem jedes Teilchen mit seinen zwei Nachbarn durch eine ideale Feder verbunden ist. Diese Anordnung bezeichnen wir als *lineare Kette*.

1.3 Schwingung der eindimensionalen, einatomigen Kette

Wir stehen nun also vor folgender Situation: wir haben ein eindimensionale Kette, in der Massestücke der Masse m vorhanden sind, die mittels Federn der Federkonstante D gekoppelt sind. Dem Aufbau entsprechend (wir können zur Beschreibung der Kräfte das Hookesche Gesetz verwenden) betrachten wir also eine Longitudinalwelle. Der Gleichgewichtsabstand der Atome betrage a , die Auslenkung relativ zur Ruhelage eines beliebigen Atome n werde durch s_n beschrieben. Hier ist n eine beliebige natürliche Zahl; die Atome seien also durchnummeriert. Nun betrachten wir die Situation im schwingenden Fall, d.h. wir haben Auslenkungen der sich in Schwingung befindlichen Atome, wodurch sich die Federn in die entsprechende Richtung spannen oder stauchen und somit eine Kraft auf das n -te Atom ausüben. Also folgende Situation (abgewandelt nach Vorbereitungshilfe).

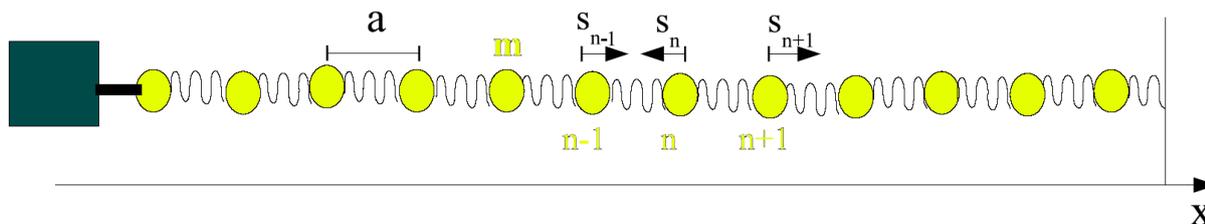


Abb.4: Harmonische Näherung

Wir können also eine Differentialgleichung für s_n aufstellen, der für die insgesamt auf das n -te Atom einwirkende Kraft gilt:

$$m \cdot \ddot{s}_n = D \cdot (s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n) \quad (7)$$

Diese Gleichung lösen wir mittels Ansatz:

$$s_n = s_0 \cdot e^{i(k \cdot a \cdot n - \omega t)} \quad (8)$$

wodurch wir nach Eingehen in die Differentialgleichung eine Relation zwischen der Kreisfrequenz ω und dem Wellenvektor k erhalten (wobei hier die Bezeichnung Wellenvektor irreführend ist, da wir uns nur in einer Dimension bewegen) - ein solcher Zusammenhang wird allgemein als *Dispersionsrelation* bezeichnet. In unserem Fall lautet die sich ergebende Dispersionsrelation:

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \quad (9)$$

Wir können aus (9) leicht ablesen, dass die Dispersionsrelation periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{a}$ ist - genau der Breite der Brillouin-Zone im eindimensionalen. Hier finden sich entsprechend für $k = \pm\frac{\pi}{a}$ das lokale Maximum von ω (und da sich die Dispersionsrelation periodisch in die weiteren Brillouin-Zonen fortsetzt, finden wir sogar das globale Maximum).

Stellen wir den Verlauf von $\omega(k)$ graphisch dar. Wie schon erwähnt ist die Funktion periodisch:

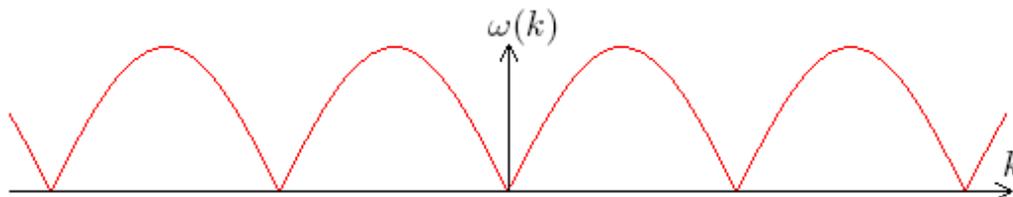


Abb.5: Dispersionsrelation der linearen, einat. Kette

Der uns interessierende Teil ist allerdings nur die 1.Brillouin-Zone:

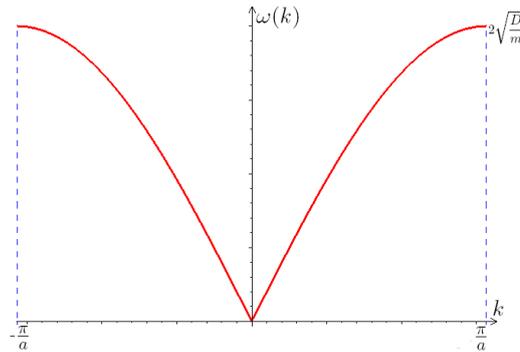


Abb.6: 1.Brillouin-Zone der linearen, einkrist. Kette

Bevor wir mit der Untersuchung der Dispersionsrelation fortfahren, führen wir noch kurz zwei Begriffe ein:

✧ **Phasengeschwindigkeit**

Die Geschwindigkeit, mit der sich eine definierte Phase der Schwingung ausbreitet, nennen wir die *Phasengeschwindigkeit*, welche sich durch

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k} \quad (10)$$

beschreiben lässt.

✧ **Gruppengeschwindigkeit**

Die *Gruppengeschwindigkeit* gibt die Geschwindigkeit des Wellenpakets an, welches eine Überlagerung aus unendlich vielen harmonischen Wellen darstellt. Es gilt:

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} \quad (11)$$

Hierbei ist anzumerken, dass man durchaus auch Geschwindigkeiten über der Lichtgeschwindigkeit erzielen kann - die Informationsübertragung, die man mit einer Welle durchführen kann, ist allerdings an die Relativitätstheorie gebunden, weshalb die Information nur langsamer als Licht übertragen werden kann. Des Weiteren kann man mit heute verfügbaren *Metamaterialien* weitere gänzlich überraschende Phänomene erleben: man kann negative Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten erzeugen (vgl. Artikel Professor Wegener im *Physik Journal*, Dez.06). Das hat, salopp gesprochen, zur Folge, dass das Maximum eines gaußförmigen Pulses früher am hinteren Probenende austritt, als das Maximum an der Probenvorderseite eintritt.

Nun aber zurück zu unserer Dispersionsrelation. Betrachten wir zwei Grenzfälle:

- ▷ Die Wellenlänge ist bei weitem größer als der Netzebenenabstand (also $ka \ll 1$). In diesem Fall kann man (9) mittels $\sin x \approx x$ nähern und man erhält

$$\omega = \sqrt{\frac{Da^2}{m}} \cdot k \quad (12)$$

Somit haben wir einen linearen Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz und dem Wellenvektor. Ein gut bekanntes Beispiel für diese Situation sind die elektromagnetischen Wellen im Vakuum, bei denen die Dispersionsrelation $\omega = c \cdot k$ lautet, was zur bekannten Ausbreitungsgeschwindigkeit c führt. Analog dazu erhalten wir in unserem Fall (s.(10) und (11)):

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{Da^2}{m}} = \frac{\omega}{k} = v_{Ph} \quad (13)$$

- ▷ Wenn wir den k -Vektor so wählen, dass er genau die Brillouin-Zonenbreite hat, so ist die Gruppengeschwindigkeit 0, was physikalisch einer stehenden Welle entspricht.

1.4 Schwingung der eindimensionalen, zweiatomigen Kette

Bei dieser Kette handelt es sich um eine Abwandlung der vorher betrachteten - hier haben wir schlicht zwei unterschiedlichen „Atomsorten“, d.h. unterschiedlich schwingende Körper, die sich alternierend wiederholen. Wir haben also folgende Situation:

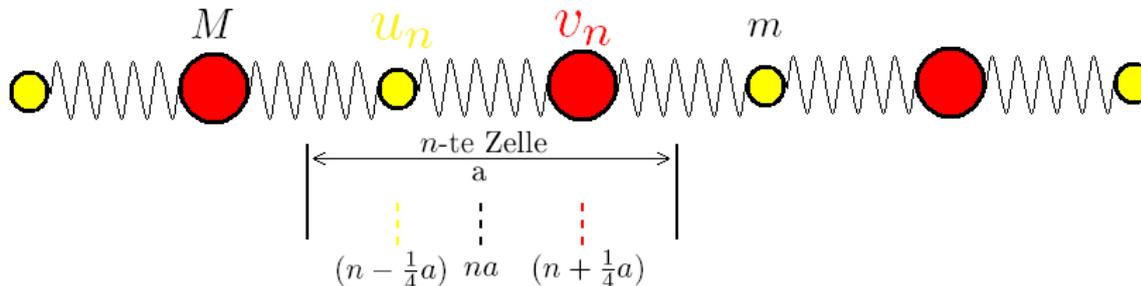


Abb.7: lineare, zweiatomige Kette

Dies führt uns auf ein Paar gekoppelter Differentialgleichungen, die wir erhalten, wenn wir die Kräfte auf die unterschiedlich schweren Körper betrachten:

$$M \cdot \ddot{u}_n = -D \cdot (2u_n - v_n - v_{n-1}) \quad (14)$$

$$m \cdot \ddot{v}_n = -D \cdot (2v_n - u_{n+1} - u_n) \quad (15)$$

Mittels des Ansatzes

$$u_n = u_0 \cdot e^{i(ka \cdot (n - \frac{1}{4}) - \omega \cdot t)} \quad (16)$$

$$v_n = v_0 \cdot e^{i(ka \cdot (n + \frac{1}{4}) - \omega \cdot t)} \quad (17)$$

erhalten wir zwei Lösungen:

$$\omega_{\pm}^2 = D \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm D \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{m \cdot M} \cdot \sin^2 \left(\frac{k \cdot a}{2} \right)} \quad (18)$$

Veranschaulichen wir uns diese Dispersionsrelation, wobei die zwei Lösungen von (17) als *Zweige* bezeichnet werden (Bearbeitung der Graphik der Vorbereitungshilfe):

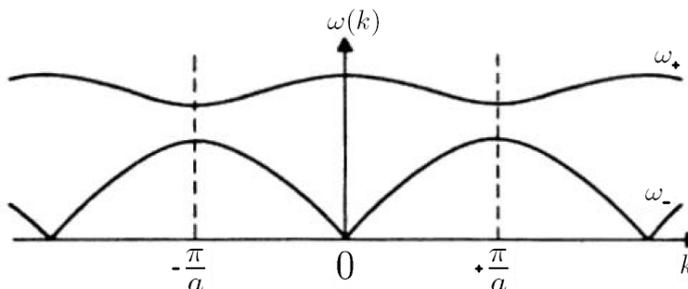


Abb.8: Dispersionszweige der linearen, zweiat. Kette

Dabei sehen wir, dass die untere Lösung, *akustischer Zweig* genannt, in ihrer Struktur mit der der linearen, einatomigen Kette übereinstimmt. Die Namensgebung erklärt sich daher, dass bei kleinen Werten für k die Dispersionsrelation (18) die Form $\omega = v \cdot k$ hat, was für Schallwellen charakteristisch ist. Die zweite Lösung bezeichnet man auch als *optischen Zweig*. Dieser Zweig wird deshalb so genannt, weil die langwelligen optischen Moden in Ionenkristallen mit eingestrahelter elektromagnetischer Strahlung in Wechselwirkung treten können, was die Ursache für das charakteristische optische Verhalten ist, was solche Kristalle bei Untersuchungen an den Tag legen. Eine weitere Besonderheit ist auch für unser Experiment wichtig: in beiden Fällen der akustischen und optischen Mode sind die Bewegungen jeder primitiven Zelle identisch, allerdings bewegen sich die Teilchen innerhalb einer Zelle im akustischen Fall in Phase, während die Bewegung benachbarter Teilchen in der optischen Mode genau um 180°

außer Phase ist. Dieses Verhalten ist gut zu erklären, wenn man sich die Schwingungsmoden anschaut (s. Anhang, Quelle: Graphiken am Praktikumsort). Hier ist eine lineare, zweiatomige Kette gegeben, deren akustische und optische Eigenmoden aufgezeichnet sind (die Eigenmoden entsprechen stehenden Wellen). Zur Einfachheit halber sind diese Wellen transversal dargestellt, wobei wir im Versuch eine longitudinale Ausbreitung haben werden. Bei den akustischen Moden schwingen die Atome in Phase, beide Atomsorten schwingen in Phase. Im optischen Fall hingegen sind die Atomsorten 180° außer Phase, d.h. man kann die optische Mode konstruieren, indem man sich die entsprechende akustische Mode anschaut und bei einer Atomsorte vor alle Auslenkungen ein Minuszeichen schreibt. Somit werden positive Auslenkungen negativ und negative Auslenkungen positiv, wodurch die beiden „Teilketten“ nun gegenphasig schwingen.

Betrachten wir nun auch für diese Lösungen die Grenzfälle:

- ▷ Wieder nehmen wir an, dass die Wellenlänge bei weitem größer als der Netzebenenabstand ist und erhalten mit der gleichen Näherung wie oben:

$$\omega_+(0) = \sqrt{2D \cdot \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \quad (19)$$

$$\omega_-(0) = 0 \quad (20)$$

- ▷ Betrachten wir die Lösungen am Rand der 1. Brillouin-Zone, so erhalten wir:

$$\omega_+ \left(\pm \frac{\pi}{a} \right) = \sqrt{\frac{2 \cdot D}{m}} \quad (21)$$

$$\omega_- \left(\pm \frac{\pi}{a} \right) = \sqrt{\frac{2 \cdot D}{M}} \quad (22)$$

Dies entspricht sehr dem Verhalten der linearen, einatomigen Kette.

Da wir später Eigenfrequenzen (Frequenz, bei der weder antreibende noch dämpfende Kraft wirkt) messen werden, sei hier noch kurz erwähnt, dass das Schwingungsspektrum des linearen, zweiatomigen Kristalls ein diskretes Spektrum für den Wellenvektor k besitzt. Für die k -Werte gilt dann:

$$k \cdot a = \frac{2\pi \cdot \mu}{N} \quad (23)$$

wobei $\mu = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}$. Damit existieren genauso viele Frequenzen, wie die Kette Atome, bzw. Massen besitzt.

1.5 Resonanz

Da dies schon im ersten Semester ausführlich diskutiert wurde, seien hier nur die Ergebnisse einer Betrachtung einer erzwungenen Schwingung angeführt:

Die Amplitude einer erzwungenen Schwingung hängt ab

- ▷ von der Amplitude $K = \frac{F_0}{m}$ der äußeren Kraft
- ▷ von der Dämpfung γ
- ▷ von der Frequenz der Erregerschwingung und der Eigenfrequenz des erregten Systems.

Schwingt man eine Feder periodisch an, so wird man feststellen, dass (Start mit kleinen Frequenzen) die Amplitude der Schwingung langsam steigt, bis sie ein Maximum erreicht, und danach wieder abfällt. Das Maximum ist dann erreicht, wenn die Erregerfrequenz in etwa der Eigenfrequenz entspricht.

Wird die Dämpfung sehr klein, so kann es zur sogenannten *Resonanzkatastrophe* kommen, bei der die Amplitude extrem stark ansteigt. Die Konsequenzen sind gut bekannt, ein berühmtes Beispiel ist der Kollaps der *Tacoma Bridge*, bei der die Amplitudensteigerung zur Zerstörung führte. Trägt man nun die Amplitude über der Erregerfrequenz auf, so erhält man eine *Resonanzkurve*.

1.6 Gütefaktor

Der *Gütefaktor* Q ist eine Größe, die uns darüber Auskunft gibt, wie viel Energie pro Periode durch z.B. Reibungsphänomene verloren geht. Wie aus der Diskussion harmonischer Oszillatoren hinlänglich bekannt sein dürfte, wird am meisten Energie auf ein schwingendes System übertragen, wenn man es mit der Resonanzfrequenz f_r anregt. Für schwach gedämpfte Systeme (und wir nehmen unseren mechanischen Versuch als schwach gedämpft an, s. Aufbau) erwartet man ein großes Q , für welches man sich die Relation

$$Q = \frac{2\pi \cdot f_r}{\Delta\omega} \quad (24)$$

herleiten kann. Hierbei ist $\Delta\omega$ die Halbwertsbreite der Intensitätskurve, bzw. die Breite der Amplitudenkurve an der Stelle, wo die Amplitude auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ erklärt sich daher, dass der Gütefaktor als inverser Energieverlust pro Periode definiert ist - da die Intensität allerdings vom Betragsquadrat abhängt, ergibt sich besagter Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, denn $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

1.7 Schallgeschwindigkeit

Wenn wir in der linearen, zweiatomigen Kette den Grenzfall von $k \rightarrow 0$ betrachten und dafür die Gruppengeschwindigkeit ausrechnen, so erhalten wir die größte Ausbreitungsgeschwindigkeit im Kristall - die *Schallgeschwindigkeit* v_s :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a \cdot \sqrt{\frac{D}{2 \cdot (M + m)}} =: v_s \quad (25)$$

Man erhält v_s , indem man an den akustischen Zweig der Dispersionskurve die Ursprungstangente legt - die Steigung ist v_s .

1.8 Phononen

Obwohl wir jetzt nicht direkt damit zu haben, sollte der Begriff doch zumindest bei einem Praktikumsversuch zu Gitterschwingungen gefallen sein: eine quantisierte Kristallwelle nennen wir *Phonon*. Vielleicht ist hier eine gute Möglichkeit noch einmal anzudeuten, warum nur der 1.Brillouin-Zone eine physikalische Bedeutung zukommt. So können z.B. Wellenlängen, die kürzer als der halbe Abstand zwischen den Atomen sind, nicht vorkommen - immerhin muss ja etwas schwingen, wenn kein Atom zum schwingen da ist, dann auch kann auch die Kristallwelle nicht existieren. Analoges gilt für Wellen, deren Abmessungen größer als die des Kristalls sind. Obwohl die genauen Zusammenhänge hier den Rahmen sprengen würden, können wir doch zumindest sagen, dass ein Phonon ein Quasiteilchen ist, das wir annehmen, um die Eigenschaften der quantenmechanisch beschriebenen Gitterschwingungen in einem Kristall besser beschreiben zu können.

Man unterscheidet zwischen akustischen und optischen Phononen. Akustische Phononen (manchmal auch als Schallquanten bezeichnet) entsprechen weitestgehend den Schallwellen, die sich durch das Kristallgitter fortpflanzen. Hierbei bewegen sich alle Atome einer Einheitszelle in Phase, während sich die Atome einer Einheitszelle bei optischen Phononen gegenphasig bewegen. Sind die gegenphasig schwingenden Atome geladen, so existieren Schwingungsmoden, bei denen entgegengesetzt geladene Untergitter gegeneinander schwingen.

2 Aufbau

2.1 Apparatur

Wie bereits beim Gütefaktor angedeutet, wollen wir diesen Versuch möglichst ungedämpft, also ohne große Reibungsverluste durchführen. Hierfür eignet sich die bereits aus Schulzeiten bekannte Luftkissenbahn sehr gut - auf einer Leiste mit Luftlöchern schweben kleine, durch Federn gekoppelte Gleiter, auf einem Luftkissen. Um genauer zu sein, werden die Gleiter als durch die aus den Löchern austretende Luft nach oben gedrückt, weshalb sie den Kontakt zur Schiene verlieren und somit auch die

starke Haft - und Gleitreibung mit der Oberfläche der Schiene den Gleiter nicht mehr bremsen. Die Gleiter besitzen Bohrungen, sodass man ein zusätzliches Massestück aufschrauben kann, wodurch man die einatomige leicht in eine zweiatomige Kette umbauen lässt.

Zur Aufzeichnung des Schwingungsbildes benutzten wir eine spezielle Kamera, die *VideoCom*.

Des Weiteren standen eine Stoppuhr und ein Lineal zur Verfügung, die wir dafür benutzten, die Auslenkungen der Gleiter zu bestimmten Zeiten zu messen. Die Auslenkungen wurden entweder per Hand oder durch einen eigens installierten Schrittmotor durchgeführt - dieser konnte, mit einer von uns vorher einzustellenden Frequenz, eine periodische Anregung durchführen. Die Luftkissenbahn wurde durch ein Gebläse angetrieben.

2.2 Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der einatomigen Kette (mittels VideoCom).
2. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der zweiatomigen Kette.
3. Nehmen Sie die Resonanzkurve für die erste akustische Eigenschwingung auf (zweiatomige Kette). Man beachte die Einschwingzeit der Kette.
4. Man messe die Kettenlänge oder die mittlere Gitterkonstante. Abschließend bestimme man für beide Ketten die Schallgeschwindigkeit per Stoppuhr.

3 Durchführung

3.1 Eigenfrequenzen der einatomigen Kette

Die Durchführung gestaltete sich in diesem und im nächsten Aufgabenteil recht einfach. Nachdem der PC am Platz hochgefahren, die VideoCom und das Gebläse angeschaltet und das Messprogramm gestartet war, waren wir bereit zur Messung. In diesem Fall wurde die hauptsächliche Arbeit vom Computer erledigt: an drei Gleitern, die innerhalb des Beobachtungswinkels der VideoCom lagen, waren Streifen retroreflektierender Folie angebracht, welche die von der Kamera emittierten LED-Blitze reflektierten. Das reflektierte Licht wurde nun wieder von der Kamera aufgefangen und in digitale Positionssignale umgewandelt, welche wiederum vom Messprogramm auf dem Computer verarbeitet wurden. Dies lies uns mit einer recht simplen Aufgabe zurück - wir lenkten die Gleiter an einer beliebigen Stelle aus und nahmen das sich ergebende Schwingungsbild mittels der VideoCom auf, wobei uns die Software die Eigenfrequenzen der Kette lieferte. Die Berechnung dieser Frequenzen geschieht mittels FFT (Fast Fourier Transformation). Da wir nur ein diskretes Spektrum an Eigenfrequenzen vorliegen haben, ist die Fourierdarstellung durch Fourierreihen gegeben. Aus den Positionssignalen kann man nun diese Reihen numerisch bestimmen und damit die Eigenfrequenzen angeben. Die Frequenzen wurden nach der Messung (Messdauer etwa 60s bis 90s) angezeigt (für jeden der drei beobachteten Gleiter) und konnten gespeichert werden. Dabei konnte es allerdings vorkommen, dass eine Eigenfrequenz bei einem Gleiter nicht stark genug angeregt wurde. Das Programm gab daraufhin schlicht keinen Wert für die konkrete Mode an und schrieb die restlichen Eigenfrequenzen auf. Dann wurde von unten (!) mit Nullen aufgefüllt. Diese Messung wurde von uns fünfmal durchgeführt.

3.2 Eigenfrequenzen der zweiatomigen Kette

Hier wurde völlig analog zur einatomigen Kette vorgegangen - allerdings wurden vorher auf jeden zweiten Gleiter Gewichte aufgeschraubt, wodurch wir das Modell einer zweiatomigen Kette untersuchen konnten. Auch hier wurden dann wieder fünf Messungen zur Bestimmung der Eigenfrequenzen mittels FFT durchgeführt.

3.3 Resonanzkurve

In diesem Aufgabenteil sollte nun die Resonanzkurve bestimmt werden. Wir benutzten den Schrittmotor, um die erste akustische Eigenschwingung der zweiatomigen Kette zu untersuchen. Dafür schauten

wir zunächst auf die Werte auf der vorigen Aufgabe - so erhielten wir einen ungefähren Wert für die Frequenz. Bevor wir aber die Messung starten konnten, mussten wir noch die Einschwingzeit ermitteln - schließlich reagieren nicht alle Gleiter der Kette instantan, sondern man muss warten, bis die Kette durch die Anregung mit der gewünschten Frequenz schwingt. Wir stellten also die Frequenz ein, bei der wir das Maximum der Resonanzkurve erwarteten und ließen die Kette schwingen. Als die Kette eine gewisse Amplitude erreicht hatte, schalteten wir den Motor ab und stoppten die Zeit, bis die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ gefallen war. Um noch genauer zu messen (der Fehler bei Abnahme auf $\frac{1}{e} \approx 0,37$ ist ja immer noch sehr hoch), legten wir die Einschwingzeit auf etwa 10 Minuten fest. Nun begannen wir die Messung - wir regten mittels Schrittmotor periodisch an, maßen nach der Einschwingzeit die Amplitude der Schwingung und ließen danach (ohne Abschaltung!) den Motor die Kette mit einer anderen Frequenz anregen. So vermaßen wir die Resonanzkurve; es sollten nach beiden Seiten vom Maximum eine gewisse Anzahl von Messwerten aufgenommen werden.

3.4 Kettenlänge und Schallgeschwindigkeit

Die Messung der Kettenlänge war verständlicherweise methodisch unspektakulär - mittels des Lineals vermaßen wir Länge der Kette und die Länge der 6 „Elementarzellen“. Abschließend sollte die Schallgeschwindigkeit direkt, also mittels Stoppuhr, gemessen werden. Dafür wurde schlicht der Gleiter am einen Ende der Kette angestoßen und die Zeit gestoppt, die zwischen Stoß gegen den ersten Gleiter und der ersten Bewegung des letzten Gleiters verging. Nun wurde noch die Strecke zwischen dem Anfang des ersten und Ende des letzten Gleiters gemessen.

4 Auswertung

4.1 Dispersionsrelation

In diesem Aufgabenteil sollen mittels der in Aufgabe 1 und Aufgabe 2 gesammelten Daten eine graphische Darstellung der Dispersionsrelationen beider Ketten erstellt werden. Dafür werden wir die Wellenvektoren (in unserem Fall sind dies Skalare) berechnen müssen. Für die gilt (23), wir wollen hier jedoch eine andere Variante wählen. Bekanntermaßen gilt (skalärer Fall):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (26)$$

Wir können also mittels der Wellenlänge die diskret liegenden k -Werte errechnen. Wir brauchen also nur noch die Wellenlängen der verschiedenen Schwingungsmoden einsetzen und erhalten die Werte für k . Um die Wellenlänge der Moden zu bestimmen, brauchen wir einen Messwert - die Gesamtlänge der Kette. Hierbei ist zu beachten, dass dies die Summe aus Abstand zwischen dem ersten und letzten Gleiter und der Länge der beiden Federn am Ende der Konstruktion ist (genauer: deren Aufhängepunkte). Wir haben die Länge zu $L = (5,37 \pm 0,01)m$ bestimmt (durch Messung mit 1m-Lineal). Nun lassen sich (s. Modenbild im Anhang, S.25) leicht die k -Werte errechnen. Es ist anzumerken, dass hier die Genauigkeit deshalb als recht hoch angesehen werden kann, da wir die gesamte Länge der Bahn abmaßen. Eine alternative Vorgehensweise wäre die Einzelmessung jeder „Elementarzelle“ und dann die Addition. Dies würde allerdings die Abweichung sehr in die Höhe treiben. Mit einem angenommenen Fehler von einem Zentimeter rechnen wir zwar optimistisch, aber nicht unrealistisch.

4.1.1 Dispersionsrelation der einatomigen Kette

Beginnen wir also mit der einatomigen Kette. Nach obiger Formel können wir angeben:

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\lambda [m]$	$2L$	L	$\frac{2}{3}L$	$\frac{1}{2}L$	$\frac{2}{5}L$	$\frac{1}{3}L$	$\frac{2}{7}L$	$\frac{1}{4}L$	$\frac{2}{9}L$	$\frac{1}{5}L$	$\frac{2}{11}L$	$\frac{1}{6}L$
k -Wert $[\frac{1}{m}]$	0,59	1,17	1,76	2,34	2,93	3,51	4,10	4,68	5,27	5,85	6,44	7,02

Wie wir bereits erwähnt haben, wurden fünf Messungen durchgeführt, bei denen aus den Bewegungen der drei betrachteten Gleiter die Eigenfrequenzen berechnet wurden. Jede dieser Messungen liefert

uns also pro Gleiter einen Messwert für $f(k)$. Da wir 3 Gleiter pro Messung betrachten, haben wir insgesamt $3 \cdot 5 = 15$ Messwerte pro Eigenfrequenz (abgesehen von wenigen Ausnahmen, wo vereinzelt bei Messungen keine Frequenzen für einen Gleiter bestimmt werden konnte). Aus diesen fünfzehn Frequenzen wurde nun jeweils der Mittelwert und die mittlere Kreisfrequenz nach

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (27)$$

berechnet. Für das arithmetische Mittel (bei n Messungen) gilt bekanntermaßen:

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f_i \quad (28)$$

Die Standardabweichung des Mittelwerts ist nach Fehlerskript gegeben durch:

$$\sigma_{\bar{f}} = \frac{\sigma_f}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{n=1}^n (f_i - \bar{f})^2} \quad (29)$$

Wir erhalten somit folgende Werte:

Mode	\bar{f} [Hz]	$\sigma_{\bar{f}}$ [Hz]	$\bar{\omega}$ [Hz]
1	0,277053	0,000165	1,740775
2	0,551823	0,000162	3,467204
3	0,817019	0,000175	5,133483
4	1,072408	0,000137	6,738137
5	1,315877	0,000116	8,267902
6	1,538835	0,000126	9,668786
7	1,741450	0,000153	10,941853
8	1,919094	0,000196	12,058023
9	2,068733	0,000140	12,998231
10	2,188955	0,000207	13,753607
11	2,278497	0,000221	14,316217
12	2,330307	0,000211	14,641748

Inwieweit hier die Angabe der vielen Nachkommastellen sinnvoll ist, lässt sich sicherlich diskutieren. Wir wissen allerdings nicht, mit welcher Genauigkeit die VideoCom arbeitet, also wie fehlerbehaftet die Werte sind. Da das Messprogramm allerdings von Physikern geschrieben wurde, gehen wir hier davon aus, dass die Ausgabe der vielen Nachkommastellen auch begründet ist, d.h. die Genauigkeit den angegebenen Werten entspricht.

Wir haben nun alle Informationen zusammengetragen, die für die Dispersionsrelation der einatomigen Kette relevant sind, abgesehen vom Verhalten im Ursprung. Hier muss natürlich $\omega(0) = 0$ gelten. Dies können wir sogar guten Gewissens als Messwert angeben - ohne Welle schwingt das System natürlich nicht (theoretisch folgt dies natürlich auch sofort aus (9)). Zur Graphik ist anzumerken, dass sich die Kurve achsensymmetrisch verhält, weshalb wir dieselben ω -Werte für die negativen k -Werte annehmen können. Wir erhalten damit:

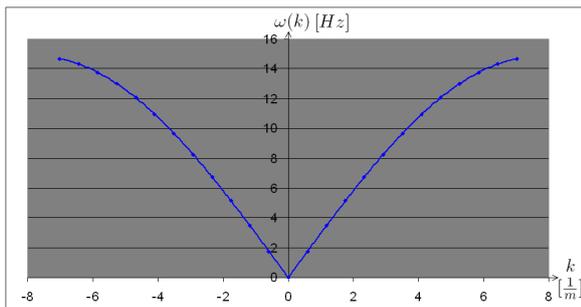


Abb.9: exp. Dispersionskurve der einat. Kette (MS Excel)

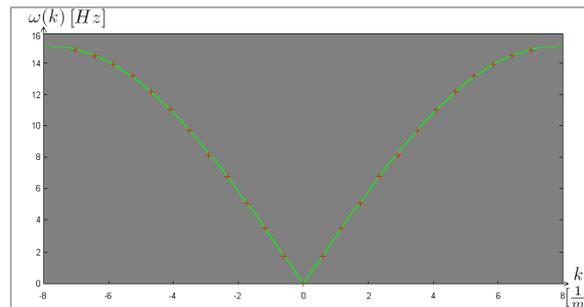


Abb.10: exp. Dispersionskurve der einat. Kette (GNUPlot)

Wie wir sehen, sind die theoretischen Erwartungen voll erfüllt worden - der Graph sieht dem theoretischen aus Abbildung 6 sehr ähnlich. Somit können wir die Theorie für die schwingende einatomige Kette als verifiziert annehmen.

Zur Untersuchung der Messwerte bedienen wir uns zweier Programme: zum einen verwendeten wir GNUPlot und zum anderen MS Excel. Bei GNUPlot ist es möglich, eine Funktion der Form (9) aufzustellen und dann einen fit zu den gemessenen Werten zu erstellen - mit anderen Worten lässt man GNUPlot die Parameter so lange variieren, bis die Funktion mit dem geringsten Fehler gefunden ist, die die Messwerte annähert. Eine weitere Möglichkeit bietet MS Excel - hier kann man ebenfalls Funktionen anpassen lassen. Wenn man sich noch an die Analysis 1 Vorlesung erinnert, dann kennt man noch die Reihendarstellung der Sinusfunktion:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \quad (30)$$

Somit kann man eine Approximation mittels MS Excel durchführen, welcher ein Polynom 5. Grades zu Grunde liegt. Allerdings müssen wir uns an dieser Stelle systematische Gedanken machen, wie das weitere Vorgehen sein soll. Verwenden wir die zugrunde liegende Theorie und versuchen anhand derer die Messdaten zu analysieren, so gehen wir davon aus, dass wir etwas in der Form (9) vorfinden und können dementsprechend auch die Ausgleichsfunktion in diese Form zwingen. Dies entspräche der Näherung mittels GNUPlot. Wenn wir uns allerdings auf den Standpunkt stellen, dass wir die Theorie nicht als gegeben annehmen können und so einfach versuchen, eine beliebige Funktion zu finden, die die Werte möglichst gut annähert, so würden wir das Polynom in Excel ansetzen. Dies ist allein deshalb schon eine andere Vorgehensweise, da das von Excel aufgestellte Polynom nicht vernachlässigbare Anteile der Potenzen x^2 und x^4 enthält, wodurch klar ist, dass es sich nicht um einen reinen Sinus handelt.

Es hilft nichts - wir müssen uns an dieser Stelle für eine Methode entscheiden. Wir wählen allerdings doch einen kleinen Zwischenweg - wie wir später sehen werden, geht aus den Messdaten recht eindeutig die prognostizierte Form der Dispersionsrelation hervor. Dies werden wir als Anlass nehmen, die Theorie als verifiziert anzusehen, um dann die Messwerte mittels Funktionen in der erwarteten Form zu analysieren. Kurz gesagt - wir entscheiden uns für eine Auswertung mittels GNUPlot.

4.1.2 Dispersionsrelation der zweiatomigen Kette

Die Auswertung geht hier natürlich völlig analog zur einatomigen Kette. Zunächst berechnen wir also die k -Werte, L bezeichne wieder die Gesamtlänge der Kette:

Mode	1.a	2.a	3.a	4.a	5.a	6.a	6.o	5.o	4.o	3.o	2.o	1.o
λ [m]	$2L$	L	$\frac{2}{3}L$	$\frac{1}{2}L$	$\frac{2}{5}L$	$\frac{1}{3}L$	$\frac{1}{3}L$	$\frac{2}{5}L$	$\frac{1}{2}L$	$\frac{2}{3}L$	L	$2L$
k -Wert [$\frac{1}{m}$]	0,59	1,17	1,76	2,34	2,93	3,51	3,51	2,93	2,34	1,76	1,17	0,59

Hierbei steht das „a“ für akustische Mode und damit das „o“ für die optische Mode. Wieder haben wir für fast jeden Gleiter 5 Messwerte pro Mode und können somit bei fast allen Frequenzen auf 15 Messwerte zurückgreifen. Mit diesen ergibt sich (wieder mittels (27),(28) und (29)):

Mode	\bar{f} [Hz]	σ_f [Hz]	$\bar{\omega}$ [Hz]
1.a	0,228705	0,122057	1,436995
2.a	0,454699	0,242367	2,856958
3.a	0,671532	0,359782	4,219362
4.a	0,876433	0,472121	5,506791
5.a	1,058412	0,576448	6,650201
6.a	1,190941	0,662062	7,482905
6.o	1,703890	0,283129	10,705855
5.o	1,672793	0,821021	10,510468
4.o	1,778703	0,843104	11,175919
3.o	1,869579	0,865842	11,746911
2.o	1,939019	0,884612	12,183215
1.o	1,980560	0,896225	12,444224

Natürlich gilt auch hier wieder die bereits benutzte Symmetrie, so dass wir die gleichen Werte im negativen Bereich von k verwenden können.

Man sollte noch anmerken, dass die Standardabweichungen unserer Mittelwerte extrem klein ist, deutlich unter einem Prozent. Dies bedeutet, dass die Messung sehr präzise durchgeführt wurde, was auf die Qualität der VideoCom und des Computerprogramms schließen lässt. Diese Feststellung gilt auch für die Messung der einatomigen Kette.

Wie wir schon begründet haben, kommt zu den oben aufgeführten Messwerten genauso wie bei der einatomigen Kette noch ein Wert hinzu: $\omega_-(0) = 0$. Dieser Wert bezieht sich natürlich auf den akustischen Zweig (siehe (20)).

Stellen wir nun also die Dispersionsrelation der linearen, zweiatomigen Kette dar:

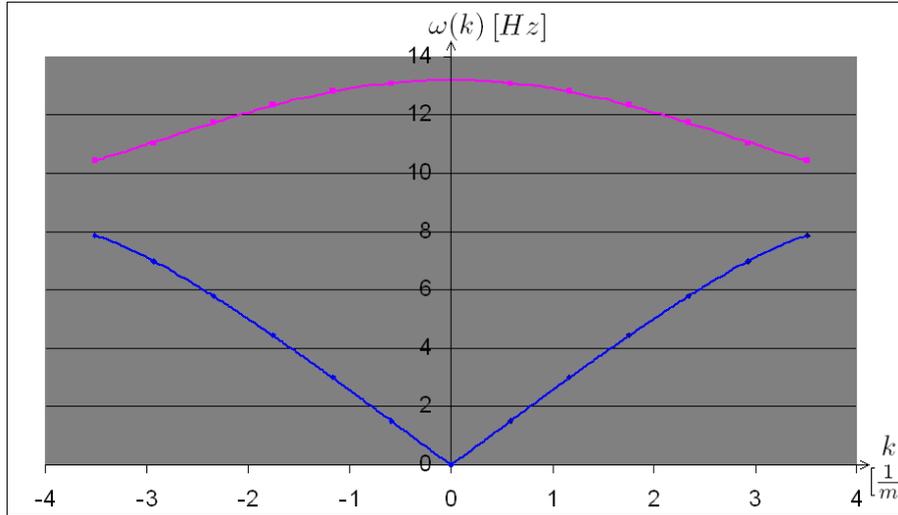


Abb.11: exp. Dispersionskurve der zweiat. Kette

Diese Kurven entsprechen genau unseren Erwartungen, da sie mit den Dispersionszweigen aus Abbildung 8 sehr gut übereinstimmen. Wir erhalten also auch bei dieser Messung eine Verifikation der Theorie.

4.2 Massenverhältnis der zweiatomigen Kette

In diesem Aufgabenteil soll mittels der Grenzfrequenzen der linearen, zweiatomigen Kette das Massenverhältnis $\frac{M}{m}$ ermittelt werden. Hierfür benutzen wir die bereits bekannten Terme für die Grenzfrequenzen in (21) und (22) (es sei noch angemerkt, dass die Aufgabenstellung nicht ganz korrekt ist, da die Berechnung des Massenquotienten mittels der Frequenz bei $k = 0$ gefordert ist - jedoch fehlen uns zu diesem Zeitpunkt die nötigen Parameter, weshalb wir uns auf (21) und (22) beschränken). Wir erhalten also:

$$\left(\frac{\omega_+ \left(\pm \frac{\pi}{a_2} \right)}{\omega_- \left(\pm \frac{\pi}{a_2} \right)} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{2 \cdot D}{m}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot D}{M}}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{M}}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2 = \frac{M}{m} \quad (31)$$

Was wir also bestimmen müssen, sind die Frequenzen des optischen und akustischen Zweiges am Rande der Brillouin-Zone. Da wir in unserer Messung mit den k -Werten diesen Rand nicht angenommen haben, werden wir die Frequenz am Rand annähern müssen.

Wie bereits im theoretischen Teil benutzt, gilt am Rand der Brillouin-Zone: $k = \frac{\pi}{a_2}$. Somit müssen wir die Gitterkonstante a_2 bestimmen. Da wir nicht nur die Gesamtlänge der Kette bestimmt haben, sondern auch die Länge von sechs Einheitszellen (Messwert: $L_{Zellen} = (5 \pm 0,01)m$), können wir a_2 sofort angeben, wobei wir mittels

$$f = x \cdot y \text{ oder } f = \frac{x}{y} \Rightarrow \left(\frac{\sigma_f}{f} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2 \quad (32)$$

(s.Fehlerskript,S.8) den Fehler von a_2 bestimmen. Dann gilt: $a_2 = (0,83 \pm 0,002) m$. Damit folgt, dass für unseren k -Wert am Rande der Brillouin-Zone gilt: $k_{Rand} = \frac{\pi}{a_2} = (3,77 \pm 0,008) \frac{1}{m}$. Hier braucht man nicht lange über die Fehlerfortpflanzung nachzudenken, immerhin ist π im Rahmen unserer Genauigkeit nicht fehlerbehaftet.

Jetzt wissen wir also, an welcher Stelle sich der Rand der Brillouin-Zone befindet. Wir werden nun allerdings statt der ersten Brillouin-Zone einen anderen Bereich betrachten und zwar die positive Seite der 1.Brillouin-Zone und den Anfang der nächsten. Dies erklärt sich aus Konvergenzgründen der Approximation. Da wir wieder von der besprochenen Symmetrie ausgehen, wissen wir, wo sich die Punkte rechts von der ersten Brillouin-Zone befinden. Wir werden also den rechten Teil unserer Kurve (also das, was wir real gemessen haben) an der Parallelen zur Y-Achse durch die Randstelle der 1.Brillouin-Zone spiegeln. Damit wird der Rand der Brillouin-Zone nach Konstruktion Symmetrieachse und wir erhalten somit als Randfrequenzen die Extrempunkte der Funktionen (s.Abb.12). Haben wir das getan, dann kommen wir auf das bereits besprochene Vorgehen: da wir in der vorangegangenen Aufgabe die Theorie verifiziert haben, untersuchen wir nun die Messwerte auf dieser Grundlage, indem wir mittels GNUPlot eine Funktion der Form (18) an unsere Werte anpassen werden. Das Ergebnis ist folgendes:

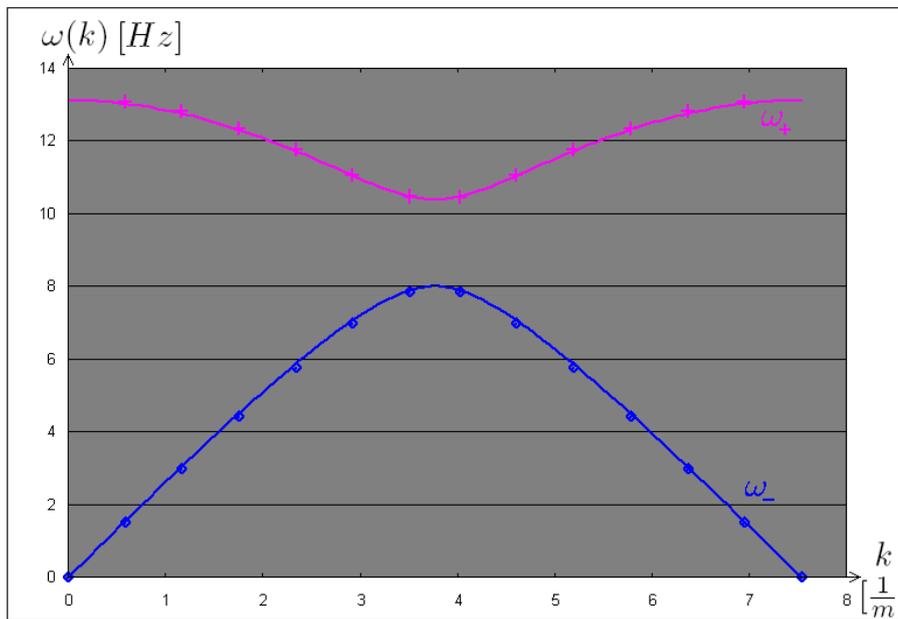


Abb.12: Approximierte Dispersionsrelation der zweiat. Kette

(Anmerkung: die Graphik wurde mittels GNUPlot erstellt, jedoch im Interesse des einheitlichen Layouts bearbeitet.) Dafür haben wir zwei Funktionen mit den gleichen Parametern a, b, c benutzt, in der Form:

$$\omega_{\pm}(k) = \sqrt{a \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \pm a \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{4}{b \cdot c} \cdot \sin^2\left(k \cdot \frac{a_2}{2}\right)}} \quad (33)$$

Mittels GNUPlot wurden folgende Parameter bestimmt:

$$a = 25,001 \pm 0,032 \quad b = 0,464 \pm 0,005 \quad c = 0,728 \pm 0,008$$

Dies ist natürlich eine sehr explizite Angabe der Funktion, wir hätten auch versuchen können, (33) allgemeiner zu schreiben, indem wir für den Term $a \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ einfach einen Parameter ansetzen. Dies ist allerdings deshalb problematisch, da ja im hinteren Term beim Sinus noch das Produkt $b \cdot c$ auftaucht. Also wären allgemeinere Parameter nicht unabhängig voneinander, weshalb es sinnvoll erschien, direkt die Form aus (18) zu verwenden. Wir können ja später noch die in den folgenden Aufgaben ermittelten Parameter mit den von GNUPlot berechneten Konstanten vergleichen. Des Weiteren wurde hier mit Absicht keine Einheit an die Größen geschrieben, da wir sie nur als Parameter des Fits ansehen wollen und nicht als physikalische Größen.

Nun können wir also die beiden gesuchten Größen, nämlich die Frequenzen am Rande der Brillouin-Zone näherungsweise berechnen, indem wir in die approximierte Funktion einsetzen. Wir erhalten somit als Grenzfrequenzen:

$$\omega_{+,approx} \left(\frac{\pi}{a_2} \right) = 10,381 \frac{1}{s}; \quad \omega_{-,approx} \left(\frac{\pi}{a_2} \right) = 8,288 \frac{1}{s} \quad (34)$$

Mittels (31) ergibt sich nun das gesuchte Massenverhältnis:

$$\left(\frac{\omega_{+,approx} \left(\frac{\pi}{a_2} \right)}{\omega_{-,approx} \left(\frac{\pi}{a_2} \right)} \right)^2 = \left(\frac{10,381}{8,288} \right)^2 = 1,569 \quad (35)$$

Bevor wir dieses näher kommentieren, betrachten wir noch den Fehler dieses Werts. Da die einzelnen Parameter fehlerbehaftet sind, müssen wir die Gaußsche Fehlerfortpflanzungsformel verwenden, um den Fehler der Grenzfrequenzen zu ermitteln. Es gilt:

$$\sigma_{\omega_{\pm,approx}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial a} \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial b} \right)^2 \cdot \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial c} \right)^2 \cdot \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial k} \right)^2 \cdot \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial a_2} \right)^2 \cdot \sigma_{a_2}^2} \quad (36)$$

Dies ist sinnvoll nur noch mittels CAS zu lösen, weshalb wir in Maple die entsprechenden Ableitungen berechnet haben und dann folgende Ergebnisse für die Fehler der Grenzfrequenzen erhalten:

$$\sigma_{\omega_{+,approx} \left(\frac{\pi}{a_2} \right)} = 0,059 \frac{1}{s}; \quad \sigma_{\omega_{-,approx} \left(\frac{\pi}{a_2} \right)} = 0,045 \frac{1}{s} \quad (37)$$

Mittels (35) und einer weiteren Fehlerfortpflanzung frei nach (32), bzw. (36) erhalten wir dann schließlich einen Fehler für das Massenverhältnis, wodurch wir als Ergebnis angeben können:

$$\frac{M}{m} = 1,569 \pm 0,025 \quad (38)$$

Wie ist dieses Ergebnis zu bewerten? Zunächst sei der Literaturwert angegeben, er lautet 1,5 (Quelle: Abbildung der Schwingungsmoden am Praktikumsplatz, s. Kopie im Anhang). Damit entspricht unser Wert 104,6% des Literaturwerts. Dies ist ein wenig enttäuschend - betrachtet man schließlich Abbildung 12, so würde man erwarten, dass die Approximation sehr genau ist. Da die Abweichungen der einzelnen Parameter aber auch recht klein sind, bliebe eigentlich nur ein systematischer Fehler zur Erklärung übrig. Diese These wird auch dadurch gestützt, dass der von uns berechnete Fehler des Massenverhältnisses gar nicht so groß ist, dass 1,5 innerhalb dieses Fehlerradius liegt.

Da der Fehler des Massenverhältnisses hauptsächlich statistische Elemente enthält, können wir aufgrund des kleinen $\sigma_{\frac{M}{m}}$ festhalten, dass wir zumindest *präzise* gemessen haben. Ob jedoch eine Abweichung von 4,6% zum Literaturwert das Prädikat *genau* verdient, sei dahingestellt.

4.3 Bestimmung der Federkonstante

An dieser Stelle soll die Federkonstante unter Zuhilfenahme der Eigenfrequenz der ersten akustischen Schwingung der einatomigen Kette und dem Literaturwert der kleinen Masse $m = 0,504$ bestimmt werden. Die dafür nötige Relation ergibt sich durch schlichte Umformung des Zusammenhangs aus (9). Da wir die erste akustische Schwingung betrachten, könnten wir auch eine Näherung für den langwelligen Fall annehmen und mittels (12) rechnen. Da dies aber nicht wirklich mit Erkenntnisgewinn behaftet ist, formen wir (9) um:

$$D = \frac{m \cdot \omega^2}{4 \cdot \sin^2 \left(k \cdot \frac{a_1}{2} \right)} \quad (39)$$

Für die erste akustische Eigenkreisfrequenz ergab sich in Aufgabe 1:

$$\bar{\omega}(0.59 \frac{1}{m}) = (1,740775 \pm 0,001037) \frac{1}{s}$$

Zur Erinnerung: der Wert für k wurde mittels der Gesamtlänge ermittelt, es war $k = (0.59 \pm 0,001) \frac{1}{m}$. Da wir die Gitterkonstante als $a_1 = (0,417 \pm 0,001) m$ bestimmt haben, können wir sofort die Federkonstante angeben. Zuvor allerdings noch die obligatorische Fehlerbetrachtung. Da recht viele Größen fehlerbehaftet sind, noch einmal die entsprechende Formel nach Gauß:

$$\sigma_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial \omega}\right)^2 \cdot \sigma_\omega^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)^2 \cdot \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial a_1}\right)^2 \cdot \sigma_{a_1}^2} \quad (40)$$

Wieder mittels CAS können wir dann als Ergebnis für die Federkonstante festhalten:

$$D = (25,359 \pm 0.151) \frac{N}{m} \quad (41)$$

Leider liegt kein Literaturwert vor, auch war weder ein Kraftmesser noch ein anzuhängendes Gewicht am Praktikumsplatz vorhanden, sodass wir keinen zweiten Messwert als Referenzwert angeben können.

4.4 Bestimmung der zweiten Masse M

In diesem Aufgabenteil gibt es mehrere Varianten, die größere Masse M zu berechnen.

- (i) Mittels des bereits berechneten Massenverhältnisses und der Angabe der kleinen Masse aus dem vorherigen Aufgabenteil kann man sehr einfach die große Masse bestimmen.
- (ii) Eine zweite Variante, die ohne den Literaturwert für die kleine Masse auskommt, orientiert sich an der Grenzfrequenz am Rande der Brillouin-Zone. Hier gilt für die Grenzfrequenz des akustischen Zweiges die Formel (22). Umgestellt ergibt sich:

$$M = \frac{2 \cdot D}{\left(\omega - \left(\frac{\pi}{a_2}\right)\right)^2} \quad (42)$$

Da beide Varianten nicht sonderlich lang sind, führen wir sowohl (i) als auch (ii) durch. Für beide wurden alle nötigen Parameter bereits in den vorherigen Aufgaben ermittelt. Es folgt also:

- (i) Mittels (38) und der Angabe, dass $m = 0.504 \text{ Kg}$ gilt, ergibt sich (unter Zuhilfenahme der Gaußschen Fehlerfortpflanzung) sofort:

$$M_{(i)} = (0,791 \pm 0,013) \text{ Kg} \quad (43)$$

Es ist gut, dass wir die Masse auf zwei Arten bestimmen - denn wir können fast sicher sein, dass diese Masse nicht ganz korrekt ist - immerhin war ja auch das Massenverhältnis fehlerbehaftet. Der Literaturwert für M ergibt sich als Produkt von 1,5 und m , also ist $M = 0,756 \text{ Kg}$. Da wir natürlich keine weiteren Parameter eingebracht haben, entspricht die Abweichung vom Mittelwert genau den 4,6%, die wir bereits für das Massenverhältnis ermittelt haben.

- (ii) Hier benötigen wir nicht einmal m , wir setzen einfach in obige Formel die bereits ermittelten Werte für die Grenzfrequenz und die Federkonstante ein. Dann wird wieder die inzwischen bekannte Fehlerfortpflanzung bemüht, wodurch wir mittels:

$$\sigma_M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial D}\right)^2 \cdot \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial \omega}\right)^2 \cdot \sigma_\omega^2} \quad (44)$$

als Ergebnis für M angeben können:

$$M_{(ii)} = (0.738 \pm 0.009) \text{ Kg} \quad (45)$$

Vergleich wir wieder mit dem Literaturwert $M = 0,756 \text{ Kg}$, so erhalten wir diesmal eine Abweichung von 2,3%. Diese Methode liefert uns somit ein genaueres Ergebnis als die in (i) benutzte Variante. Wieder ist allerdings zu beobachten, dass die Abweichung eigentlich recht klein ist, trotzdem aber $0,756 > 0.738 + 0.009$ gilt. Dies bestätigt wiederum die Vermutung eines systematischen Fehlers.

Bevor wir nun zur Schallgeschwindigkeit kommen, sei noch kurz die Bemerkung gemacht, dass die von GNUPlot gefitteten Parameter (jetzt identifiziert mit den physikalischen Größen D, m und M) durchaus recht nahe an den nun errechneten Werten liegen.

4.5 Schallgeschwindigkeit

Hier ist zunächst einmal zu sagen, dass es verschiedene Varianten gibt, hier die Schallgeschwindigkeit zu ermitteln:

✧ *Manuelle Messung*

Dies dürfte schon a priori die ungenaueste Variante sein. Wie bereits beschrieben, wurde der letzte Gleiter angestoßen und gewartet, bis der erste sich bewegt. Dafür stupste einer von uns an der einen Seite an, der andere hatte ein Lineal an die Position des ersten Gleiters gehalten, um so die Bewegung leichter wahrnehmen zu können. Die anstupsende Person startete dann gleichzeitig zur Auslenkung die Uhr. Die offensichtlichen Fehlerquellen sind hier die Reaktionszeit der Beteiligten. Zum einen muss (am dem Ende der Kette, an dem der „Schall“ ankommt) zunächst einmal festgestellt werden, dass sich der Gleiter bewegt, dann muss die Information ausgesprochen werden und in Luft propagieren, dann von der Person mit der Stoppuhr verarbeitet werden und schließlich der Knopf gedrückt werden. Der Hauptteil fällt also der Reaktionszeit zu, wobei selbst schon die Propagation von Schall in Luft mit $300 \frac{m}{s}$ und $5m$ Laufweg einen Fehler von etwa einem Prozent erzeugt!

Hierbei ist natürlich anzumerken, dass es hier ja nur um die Größenordnung der Messung ging und um keine statistisch verlässliche Messreihe. Deshalb haben wir auch die Anzahl der Messungen eher klein gehalten.

✧ *Bestimmung mittels Dispersionsrelation, bekannte Parameter*

Diese und die nächste Variante sind eigentlich recht nah aneinander - beide befinden sich in der Nähe vom Grenzfall $k \rightarrow 0$. In diesem Teil werden wir die in (13) und (25) analytisch gegebenen Ausdrücke für die Schallgeschwindigkeit mittels der für die Massen und die Federkonstante bestimmten Werte benutzen.

✧ *Bestimmung mittels Dispersionsrelation, Ursprungsgerade*

Da wir im vorigen Teil den analytischen Weg wählten, folgt nun der Teil mit den Messwerten. Hierfür bedienen wir uns einer Geraden durch den Ursprung an den akustischen Zweig der Kette, wobei die Steigung der Geraden die Schallgeschwindigkeit darstellt. Warum ist hier die Anwendung einer Geraden sinnvoll? Wie wir bereits in den Abbildungen 9 und 12 sehen, ist der Beginn der Dispersionsrelation (also für kleine k und lange Wellen) fast linear. Analytisch lässt sich dies (der Einfachheit halber bei der einatomigen Kette) mittels (30) verstehen - da die Dispersionsrelation als Sinus-Funktion gegeben ist, können wir sie auch als Potenzreihe ausschreiben. Diese enthält den Grad 1 und dann als nächsten Term den Grad 3. Da wir aber annehmen, dass wir uns nahe der Null befinden, können wir in guter Näherung alle Terme höher als 1. Grades weglassen und erhalten somit eine Gerade.

So werden wir also die Dispersionsrelation der einatomigen und den akustischen Zweig der zweiatomigen Kette untersuchen.

4.5.1 Schallgeschwindigkeit der einatomigen Kette

✧ Manuelle Messung

Es ergaben sich folgende Messwerte für die gestoppte Zeit:

	1.Messung	2.Messung	3.Messung	4.Messung	Mittelwert
$t_{\text{einat}} [s]$	1,92	1,84	1,77	1,74	1,82

Eine Standardabweichung anzugeben, scheint bei einer solch kleinen und so ungenau gemessenen Stichprobe nicht sinnvoll zu sein. Die Zeit bezieht sich auf die Strecke Beginn des ersten Gleiters bis Ende des letzten Gleiters, welche wir als $l = (4,78 \pm 0.01)m$ angeben können. Somit erhalten wir als Durchschnittsschallgeschwindigkeit der einatomigen Kette: $\bar{v}_{s,\text{manuell,einat}} = 2,63 \frac{m}{s}$.

✧ Bestimmung mittels Dispersionsrelation, bekannte Parameter

Hierfür bemühen wir nun also (13) und erhalten mittels einer Fehlerfortpflanzung:

$$v_{s,\text{einat},1} = a_1 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = (2,958 \pm 0,011) \frac{m}{s} \quad (46)$$

Hierbei ist D die von uns zuvor ermittelte Federkonstante und für m wird der angegebene Literaturwert verwendet.

✧ Bestimmung mittels Dispersionsrelation, Ursprungsgerade

Um hier eine möglichst gute Gerade durch den Ursprung zu erhalten, verwenden wir einfach die ersten 3 Werte, beginnend mit $\omega(0) = 0$. Damit erhalten wir die Ursprungsgerade, welche aufgrund der schon mehrfach angeführten guten Näherung der Linearität der Dispersionsrelation nahe $k = 0$ existiert. Wir erhalten somit:

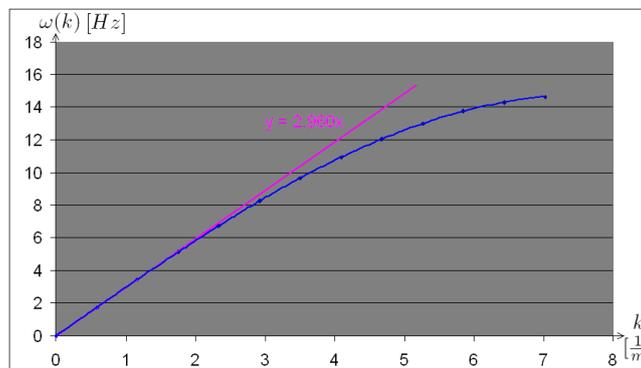


Abb.13: Lineare Approx. zur Schallgeschw. der einat. Kette

Dadurch ergibt sich nun die Schallgeschwindigkeit als die Steigung der Geraden:

$v_{s,\text{einat},2} = 2,960 \frac{m}{s}$. Dieser Wert stimmt sogar phantastisch gut mit der Geschwindigkeit überein, die wir mittels der Parameter bestimmt haben.

4.5.2 Schallgeschwindigkeit der zweiatomigen Kette

✧ Manuelle Messung

Es ergaben sich folgende Messwerte:

	1.Messung	2.Messung	3.Messung	Mittelwert
$t_{\text{zweiat}} [s]$	2,07	2,14	2,10	2,10

Auch hier scheint die Angabe einer Standardabweichung eher nicht sinnvoll zu sein. Da die Strecke, über die sich das Signal ausbreiten muss, dieselbe wie oben ist, geben wir an:

$$\bar{v}_{s,manuell,zweiat} = 2,28 \frac{m}{s}$$

✧ *Bestimmung mittels Dispersionsrelation, bekannte Parameter*

Für diesen Teil verwenden wir die Formel (25) und erhalten, nebst Fehlerfortpflanzung:

$$v_{s,zweiat,1} = a_2 \cdot \sqrt{\frac{D}{2 \cdot (M + m)}} = (2,652 \pm 0,014) \frac{m}{s} \quad (47)$$

Hierbei ist D wie immer die von uns bestimmte Federkonstante, m der Literaturwert der kleinen Masse und M der in (45) errechnete Wert.

✧ *Bestimmung mittels Dispersionsrelation, Ursprungsgerade*

Wir suchen die größte Geschwindigkeit im Bereich von $k \approx 0$, weshalb wir eigentlich eine Ursprungstangente an den akustischen Zweig der Dispersionsrelation legen müssten. Dann ist die nahe liegendste Variante, die von uns gefittete Kurve abzuleiten und bei $k = 0$ auszuwerten. Dies haben wir auch durchgeführt - leider mit dem Ergebnis, dass wir entweder mit 0 dividieren müssen oder ein komplexes Ergebnis erhalten. Somit scheint dieser Weg nicht zu einem analytischen Ergebnis zu führen. Wir können aber zumindest einen Näherungswert angeben, indem wir die Ableitung durchführen und zumindest in der Nähe von $k = 0$ die Tangentensteigung bestimmen. Mittels $k = 0.1$ ergibt sich z.B. $v_{s,Abl.} = 2,687 \frac{m}{s}$. Dies entspräche recht genau dem Ergebnis der vorherigen Messung.

Wenn wir auch so vorgehen wie bei der einatomigen Kette, dann legen wir auch hier wieder eine Gerade durch den Ursprung:

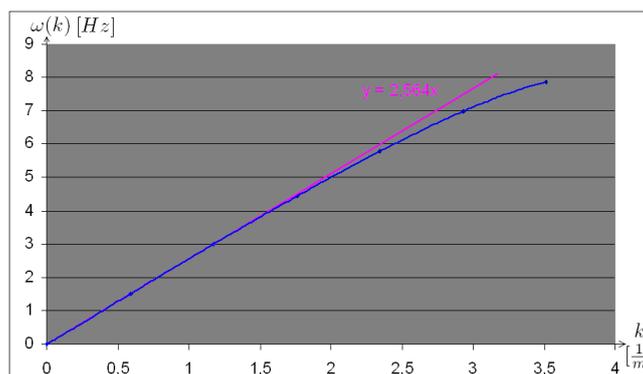


Abb.14: Lineare Approx. zur Schallgeschw. der zweiat. Kette

Auch hier erhalten wir eine recht gute Übereinstimmung mit dem durch die Parameter errechneten Wert. Die Schallgeschwindigkeit ist wieder die Geradensteigung: $v_{s,zweiat,2} = 2,564 \frac{m}{s}$.

Ergebnis

Aus den manuellen Messungen erhalten wir, dass die Schallgeschwindigkeit der zweiatomigen Kette geringer als die der einatomigen Kette ist. Dieses Ergebnis wird durch den rechnerischen Weg, der sich der gesammelten Parameter bedient, bestätigt, denn auch hier läuft das Signal langsamer durch die zweiatomige Kette. Schließlich wird dieses Ergebnis auch vom dritten Weg getragen.

Physikalisch können wir uns dies so erklären, dass die Gleiter mit der schweren Masse träger sind als die mit der kleineren Masse und somit das Signal langsamer durch die Anordnung läuft, wenn es abwechselnd auf schwere Gleiter und leichte Gleiter trifft.

Die berechneten Werte sind allein schon aufgrund ihrer geringen Abweichung sicherlich verlässlicher als unsere Messung per Hand. Immerhin können wir aber sagen, dass unsere Messungen per Hand nicht mehr als 15% von den genau ermittelten entfernt liegen, man möge selbst beurteilen, ob dies im Rahmen der Messgenauigkeit ein Erfolg ist, wir plädieren dafür.

Die beiden anderen Varianten erscheinen bei den von uns aufgenommenen Messwerten gleich gut zu sein. Die Qualität erkennt man gut daran, dass am Anfang der Kurven die approximierten Geraden fast exakt auf dem approximierten Funktionsgraphen liegen. Als Endergebnis können wir also guten Gewissens (46) und (47) verwenden, für diese Werte haben wir ja sogar eine Fehlerabschätzung.

4.6 Resonanzkurve und Gütefaktor

Bevor wir näher auf die Messung und das Aussehen der Resonanzkurve eingehen, müssen wir die sogenannte *Einschwingzeit* berücksichtigen. Die Situation ist folgende - da wir ja (s. Durchführung) eine periodisch antreibende Kraft vorliegen haben, müssen wir herausfinden, wie diese auf das System wirkt. Da wir von einer Erregerfrequenz zur nächsten wechseln müssen, ist es nötig zu wissen, wie lange man etwa warten muss, damit sich das System der neuen Frequenz anpasst.

Dafür bestimmten wir nun zuerst den *Abklingkoeffizienten* τ , der uns per Definition darüber Auskunft gibt, wie lange die Amplitude des Systems braucht, um (ohne antreibende Kraft) auf $\frac{1}{e}$ ihres Ausgangswertes zu fallen. Um diesen Wert zu bestimmen, suchten wir uns zunächst den Wert aus den vorherigen Messungen heraus, den wir für die erste akustische Eigenschwingung erhalten hatten. Wir stellten daraufhin den Schrittmotor so ein, dass die Erregerfrequenz genau der vorher ermittelten Frequenz entsprach. Da wir uns nahe einer Eigenschwingung befanden, begann die Amplitude sich kontinuierlich zu erhöhen. An einem gewissen Punkt stoppten wir die antreibende Kraft und warteten, bis die Amplitude auf besagte $\frac{1}{e}$ abgefallen war.

Die Erregerfrequenz bei diesem Vorversuch betrug bei uns $f = 0,24148 \frac{1}{s}$, bzw. $T = 4141 \text{ ms}$. wir erhielten:

▷ 1.Messung: Amplitude = 25cm $\tau_1 = 225 \text{ s}$

▷ 2.Messung: Amplitude = 15cm $\tau_2 = 228 \text{ s}$

Das Abklingen erfolgt natürlich amplitudenunabhängig, wir warten ja nur, bis die Amplitude auf 36,8% abfällt. Dies ist natürlich bei weitem nicht genau - um also genauer zu messen, warteten wir etwas das Dreifache der Einschwingzeit - somit wählten wir als Zeitintervall zwischen den Messungen 10 Minuten. Die Aufgabe war es nun, die Resonanzkurve für die erste akustische Eigenschwingung zu vermessen. Hierbei sollten jeweils recht uns links vom Maximum 6 Messpunkte aufgenommen werden, 4 im Abstand von 5ms und 2 weitere im Abstand von 10ms.

Wir gingen nun so vor, dass wir eine Erregerfrequenz einstellten (als erstes: die nach Aufgabe 1 erwartete Frequenz der Eigenschwingung), die Einschwingzeit von $10 \text{ min} \approx 3 \cdot \tau$ abwarteten und dann die Amplitude maßen (mittels Lineal), genauer gesagt maßen wir zur Fehlerminimierung den Abstand zwischen den beiden Umkehrpunkten der Gleiter, also das doppelte der Amplitude. Dabei stellten wir auf dem Wege der Messung fest, dass sich das Maximum oberhalb der zunächst angenommenen Frequenz befindet - wir maßen so lange weiter, bis die geforderte Anzahl von Messpunkten erreicht war. Die Messwerte waren folgende:

T [ms]	T [s]	Frequenz [Hz]	2· Amplitude [cm]	Amplitude [cm]
4126	4,126	0,2423655	28,5	14,25
4136	4,136	0,2417795	34,5	17,25
4141	4,141	0,2414876	37	18,5
4146	4,146	0,2411963	47,5	23,75
4151	4,151	0,2409058	55,5	27,75
4156	4,156	0,2406160	64,5	32,25
4161	4,161	0,2403268	73	36,5
4166	4,166	0,2400384	79	39,5
4171	4,171	0,2397507	77,5	38,75
4176	4,176	0,2394636	64,5	32,25
4181	4,181	0,2391772	50	25
4186	4,186	0,2388915	40	20
4196	4,196	0,2383222	28,5	14,25
4206	4,206	0,2377556	22	11

Wir wissen aus (24), dass

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} \quad (48)$$

gilt, weshalb wir nun die Amplitude über f auftragen, da wir nun für den Gütefaktor die Breite der Kurve an der Stelle des Maximums auf Höhe von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ der Maximalamplitude suchen. Da wir hier keine weiteren Informationen über das genaue Aussehen der Kurve haben, bearbeiten wir die Funktionswerte mittels kubischer Splines.

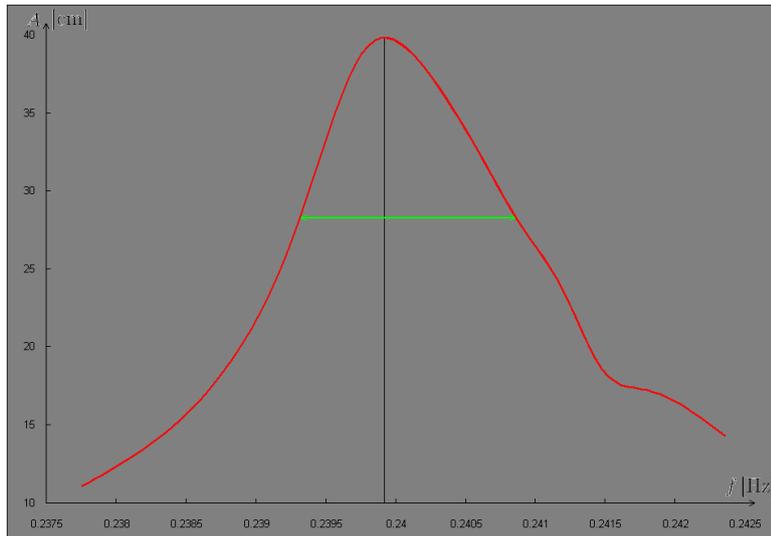


Abb.15: Resonanzkurve der 1.a Eigenmode der zweiat. Kette

Die maximale Amplitude wird bei $f = 0,23994 \text{ Hz}$ erreicht. Die Amplitude selbst beträgt dort $A = 39,897 \text{ cm}$ und damit gilt $\frac{A}{\sqrt{2}} = 28,211 \text{ cm}$ (zur Orientierung wurde die grüne Linie gezeichnet). Des Weiteren ergibt sich $\Delta f = 0,00156 \text{ Hz}$.

Wir können damit den Gütefaktor berechnen und es ergibt sich:

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} = 153,81 \quad (49)$$

Leider können wir hier mit keinem Literaturwert vergleichen.

5 Anhang

5.1 Messprotokoll

a

5.2 Darstellung der Eigenschwingungen

a

5.3 bearbeitete Messdaten