

# Versuch: Zeeman-Effekt

Versuchsdurchführung: Mittwoch, 22. November 2006

## Ziele des Versuchs

Primäre Aufgabe ist die Untersuchung des Spektrums einer Heliumlampe mit dem Gitterspektrometer. Nachdem zunächst das Spektrum großräumig untersucht worden ist, wird dann die Feinstruktur bzw. der Zeeman-Effekt näher unter die Lupe genommen. Nebenbei lernen wir den Umgang mit Termschemata und dem für die Atomphysik bedeutenden Hilfsmittels „Gitterspektrometer“. Abschließend ist eine  $\frac{e}{m_e}$ -Bestimmung mittels Zeeman-Effekt durchzuführen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1	Anomaler Zeeman-Effekt . . . . .	2
1.2	Normaler Zeeman-Effekt . . . . .	2
1.2.1	Klassische Erklärung . . . . .	2
1.2.2	Vektorgerüstmodell . . . . .	3
1.3	Paschen-Back-Effekt . . . . .	4
1.4	Quadratischer Zeeman-Effekt . . . . .	4
1.5	Stark-Effekt . . . . .	4
1.6	Kopplungstypen . . . . .	4
1.7	Termschema des Heliums . . . . .	5
1.8	Auswahlregeln . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>7</b>
2.1	Theorie . . . . .	7
2.2	Praxis . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>9</b>
3.1	Aufnahme eines Übersichtsspektrums . . . . .	9
3.1.1	Wellenlängenbereich 300 nm bis 800 nm . . . . .	9
3.1.2	Wellenlängenbereich 500 nm bis 800 nm mit Rotfilter . . . . .	9
3.2	Zeeman-Aufspaltung der He-I-667,8 nm-Linie . . . . .	10
3.3	Zeeman-Aufspaltung einer beliebigen anderen Linie . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>13</b>
4.1	Zuordnung der He-Linien zu den Übergängen im Termschema . . . . .	13
4.1.1	Tabelle mit den Wellenlängen aller möglichen Übergänge . . . . .	13
4.1.2	Messung . . . . .	14
4.2	$\frac{e}{m}$ -Bestimmung mittels Zeeman-Aufspaltung . . . . .	15
4.2.1	Statistischer Fehler . . . . .	16
4.2.2	Systematischer Fehler . . . . .	17
4.2.3	Gesamtfehler . . . . .	18

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Anomaler Zeeman-Effekt

1896 entdeckte der niederländische Physiker Pieter Zeeman, dass sich die Spektrallinien einer Lichtquelle beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes aufspalten. Beobachtet man im Spektrum eines Atoms ohne Magnetfeld eine einzelne Spektrallinie, so wird man nach Einschalten des Magnetfeldes statt dieser einen z.B. drei oder vier Linien beobachten können. Wie kann man diese Aufspaltung erklären?

Die Elektronen im Atom haben ein eigenes magnetisches Moment. Legt man nun ein Magnetfeld an, so kommt es zu Wechselwirkungen zwischen den Magnetfeldern - je nach Ausrichtung der magnetischen Momente ergeben sich unterschiedliche Energiezustände, also auch unterschiedliche Spektrallinien (schließlich hängt die Frequenz des emittierten Photons von der Energiedifferenz zwischen zwei Zuständen ab). Ursache für die Aufspaltung ist also das magnetische Moment der Elektronen - und dieses wiederum hängt vom Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  und vom Eigendrehimpuls (Spin)  $\vec{S}$  ab. Im allgemeinen Fall (unlogischerweise „anomaler Zeeman-Effekt“ genannt) gehen beide Größen in das magnetische Moment ein, das magnetische Moment basiert also auf dem Gesamtdrehimpuls  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  mit Quantenzahl  $j = l \pm s = l \pm \frac{1}{2}$ . Für das magnetische Moment gilt dann:

$$\vec{\mu}_J = -g_J \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{J} \quad (1)$$

- $\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ : Bohr'sches Magneton
- $g_J = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2 \cdot j(j+1)}$ : Landé- oder g-Faktor, dimensionslose Größe, die  $\vec{J}$  und  $\vec{\mu}_J$  verknüpft. Bestimmung mit Elektronenspin-Resonanz oder über die magnetische Resonanz von paramagnetischen Substanzen und Ferriten.

Auf dieser Basis lässt sich herleiten, welchen Abstand die durch ein äußeres Magnetfeld  $B_0$  verursachten unterschiedlichen Energieniveaus haben:

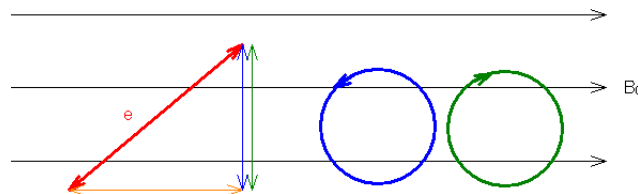
$$\Delta E_{Zeeman} = g_J \cdot \mu_B \cdot B_0 \quad (2)$$

## 1.2 Normaler Zeeman-Effekt

Der Normale Zeeman-Effekt ist der Sonderfall des anomalen Zeeman-Effekts, bei dem kein Spinmagnetismus vorhanden, der Gesamtspin also  $\vec{S} = \sum_i s_i = 0$  ist. Bei einem Einelektronenatom kann dies natürlich nicht der Fall sein, es müssen also wenigsten zwei Elektronen beteiligt sein, deren Spin sich zu Null addiert (sprich: deren Spins antiparallel ausgerichtet sind).

### 1.2.1 Klassische Erklärung

Wir betrachten ein Elektron, das um den Kern umläuft. Zerlegt man diese Bewegung in die einzelnen Richtungskomponenten, so erhalten wir drei linear schwingende Ersatz-Oszillatoren.



- rot: Bewegung des Elektrons um den Kern
- orange: Ersatz-Elektron, das linear parallel zu  $\vec{B}_0$  schwingt
- blau und grün: Ersatz-Elektronen, die entgegengesetzt zirkular zueinander und jeweils senkrecht zu  $\vec{B}_0$  schwingen - dies ist erlaubt, weil sich jede lineare Schwingung durch Addition zweier entgegengesetzt zirkularer Schwingungen darstellen lässt.

Das äußere Magnetfeld hat nun folgenden Einfluss auf die Teilbewegungen:

- Das orangene Ersatz-Elektron schwingt parallel zu  $\vec{B}_0$ , erfährt also keine Lorentzkraft.
- Die zirkular schwingenden Ersatz-Elektronen sind senkrecht zum Magnetfeld ausgerichtet, sie erfahren deshalb die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = e \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_0)$ .

Hieraus erhalten wir folgende Differentialgleichungen zur Beschreibung unserer Schwingung (harmonischer Oszillator + evtl. Lorentzkraft):

$$m_e \cdot \ddot{x} + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot x - e \cdot \dot{y} \cdot B_0 = 0 \quad (3)$$

$$m_e \cdot \ddot{y} + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot y + e \cdot \dot{x} \cdot B_0 = 0 \quad (4)$$

$$m_e \cdot \ddot{z} + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot z = 0 \quad (5)$$

Aus (5) folgt sofort für die Lösung der orangenen Teilbewegung:  $z = z_0 \cdot e^{i\omega_0 t}$ , also unveränderte Frequenz des in z-Richtung schwingenden (orangenen) Ersatz-Elektrons. Für die anderen Richtungen erhalten wir mit den Substitutionen  $u = x + iy$ ,  $v = x - iy$  unter der Voraussetzung  $\frac{e \cdot B_0}{2 \cdot m_e} \ll \omega_0$ :

$$u = u_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 - \frac{e \cdot B_0}{2 \cdot m_e}) \cdot t} \quad (6)$$

$$v = v_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 + \frac{e \cdot B_0}{2 \cdot m_e}) \cdot t} \quad (7)$$

Dies ist die Darstellung einer links- und einer rechtszirkularen Schwingung mit den Frequenzen  $\omega_0 \pm \frac{e \cdot B_0}{2 \cdot m_e}$ . Diese beiden Ersatz-Elektronen emittieren also um  $\delta\omega = \frac{e \cdot B_0}{2 \cdot m_e}$  verändertes Licht. Die Frequenz ändert sich deshalb wie folgt:

$$\delta\nu = \frac{\delta\omega}{2\pi} = \frac{e \cdot B_0}{4\pi \cdot m_e} \quad (8)$$

### 1.2.2 Vektorgerüstmodell

Quantenmechanisch beschreiben wir die Situation wie folgt: der Drehimpulsvektor  $\vec{J}$  und damit auch das magnetische Moment  $\mu_J$  präzediert um die Feldrichtung  $\vec{B}_0$ , welche wir in z-Richtung annehmen. Für den Erwartungswert der z-Komponente des magnetischen Moments gilt nach Physik IV:

$$\langle \mu_{J_z} \rangle = -g_J \cdot m_j \cdot \mu_B \quad (9)$$

$m_j$  ist hierbei die Richtungsquantenzahl des Gesamtdrehimpulses,  $m_j = j, j-1, \dots, -j$ . Die Zusatzenergie des Atoms im Magnetfeld ist dann gerade das negative Produkt aus magnetischem Moment in z-Richtung und dem ja ebenfalls in z-Richtung verlaufenden äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_0$ :

$$E_{Zeeman} = -\langle \mu_{J_z} \rangle \cdot B_0 = g_J \cdot m_j \cdot \mu_B \cdot B_0 \quad (10)$$

Mit  $\Delta m_j = 1$  gilt dann für den Abstand zweier Energieniveaus:

$$\Delta E = g_J \cdot \mu_B \cdot B_0 \quad (11)$$

Beim „normalen Zeeman-Effekt“ ist der Spin wie oben erwähnt Null. Wir erhalten:  $s = 0$ , also auch  $j = l \pm s = l$ , weshalb für den g-Faktor dann gilt:

$$g_J = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2 \cdot j(j+1)} = 1 + \frac{j(j+1) - j(j+1)}{2 \cdot j(j+1)} = 1 + 0 = 1 \quad (12)$$

Die in (11) aufgeschriebene Energieverschiebung  $\Delta E$  äußert sich in einer Frequenzverschiebung  $h \cdot \delta\nu = \Delta E$ . Also:

$$\delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1 \cdot \mu_B \cdot B_0}{h} = \frac{e \cdot B_0}{4\pi \cdot m_e} \quad (13)$$

Für die optischen Übergänge gilt es die Auswahlregel  $\Delta m_j = 0, \pm 1$  zu beachten. Demnach spaltet beim normalen Zeeman-Effekt eine Spektrallinie beim Anschalten des Magnetfeldes in drei Linien auf.

### 1.3 Paschen-Back-Effekt

Der oben beschriebene Zeeman-Effekt gilt für „schwache“ äußere Magnetfelder, die die Kopplung zwischen Bahn- und Spinmoment (Spin-Bahn-Kopplung) nicht aufbrechen können. Da die Spin-Bahn-Kopplung proportional zur Kernladungszahl  $Z$  ist, ist bei leichten Atomen bereits ein relativ schwaches von außen angelegtes Magnetfeld stärker als die Spin-Bahn-Kopplung. Ist dies der Fall, so werden Bahn  $\vec{L}$  und Spin  $\vec{S}$  entkoppelt und präzedieren einzeln um  $\vec{B}_0$ , der „Paschen-Back-Effekt“ tritt ein. Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  hat nun keine Bedeutung mehr. Dementsprechend tauchen Bahn- und Spinmoment in der Formel für die energetische Aufspaltung der Spektrallinien einzeln auf:

$$\Delta E = (\Delta m_l + 2 \cdot \Delta m_s) \cdot \mu_B \cdot B_0 \quad (14)$$

Beim Paschen-Back-Effekt gelten folgende Auswahlregeln:

- $\Delta m_l = 0, \pm 1$
- $\Delta m_s = 0$  (Begründung: elektrische Dipolstrahlung kann keine Spinumkehr bewirken)

Wir erhalten also wieder ein Aufspaltungstriplett.

### 1.4 Quadratischer Zeeman-Effekt

Falls die Magnetfeldstärke weder eindeutig stark oder schwach ist, so dass eine Zuordnung in Zeeman- oder Paschen-Back-Effekt nicht möglich ist, benutzt man die Terme des Zeeman-Effekts unter Berücksichtigung höherer Ordnungen. Hierbei beginnt man mit den Termen der 2. Potenz, woher der Name „quadratischer Zeeman-Effekt“ stammt.

### 1.5 Stark-Effekt

Während der Zeeman-Effekt die Aufspaltung der Spektrallinien unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes beschreibt, spricht man bei einem äußeren elektrischen Feld vom Stark-Effekt. Allerdings sind dessen Auswirkungen deutlich geringer, die Feinstrukturaufspaltung ist nicht ganz so groß wie beim Zeeman-Effekt.

- **Quadratischer Stark-Effekt:** das elektrische Feld induziert Dipole im Atom, deren Energie proportional zum Quadrat der Feldstärke ist. Dementsprechend spalten die Energieniveaus quadratisch zur Feldstärke auf.
- **Linearer Stark-Effekt:** das Atom besitzt ein permanentes Dipolmoment, beim Anlegen eines elektrischen Feldes verhält sich die Energieaufspaltung direkt proportional zur Feldstärke.

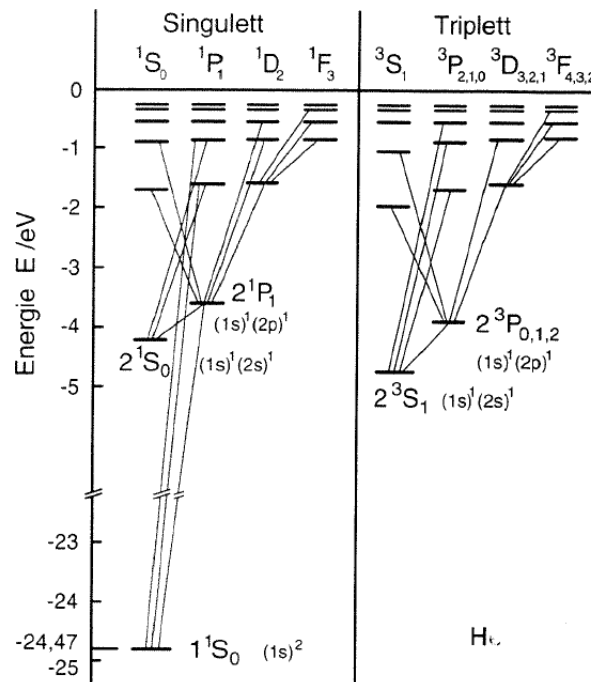
### 1.6 Kopplungstypen

Der in 1.1 beschriebene anomale Zeeman-Effekt basiert darauf, dass sich Bahn- und Spindrehimpuls eines Elektrons zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  zusammensetzen. Besteht nun ein Atom aus mehr als einem Elektron, kann eine solche Kopplung auch zwischen den Drehimpulsen verschiedener Elektronen auftreten - es kann wie beim Paschen-Back-Effekt sogar zu einer Kopplung mit einem äußeren Magnetfeld kommen, falls dieses stärker als die atominternen Kopplungen (magnetische Wechselwirkungen) ist.

- **LS-Kopplung (Russel-Saunders-Kopplung):** tritt bei leichten Atomen auf. Die Spin-Bahn-Wechselwirkungen der *einzelnen* Elektronen sind hier deutlich kleiner als die Kopplung von Bahn- und Spindrehimpuls *verschiedener* Elektronen. Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  setzt sich also aus Gesamt-Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  und Gesamt-Spin  $\vec{S}$  zusammen,  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .
- **jj-Kopplung:** tritt bei schweren Atomen auf. Die Spin-Bahn-Wechselwirkungen der *einzelnen* Elektronen sind hier deutlich größer als die Kopplung von Bahn- und Spindrehimpuls *verschiedener* Elektronen. Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  setzt sich also aus der Summe der Drehimpulse der einzelnen Elektronen zusammen,  $\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i$ ,  $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$ .

## 1.7 Termschema des Heliums

Im Folgenden sei das Termschema des einfachsten Mehrelektronensystems, dem aus zwei Elektronen bestehenden Helium, näher diskutiert.



1. **Singulett-Zustand:** Singulett bedeutet, dass für die Spinquantenzahl  $S$  des Gesamtatoms gilt:  $2S + 1 = 1$ , also  $S = 0$ . Die Spins der beiden beteiligten Elektronen sind also gerade antiparallel ausgerichtet, so dass sie sich gegenseitig aufheben. Dementsprechend fehlt die Feinstruktur, alle Linien sind einfach. Helium im Singulett-Zustand wird auch Parahelium genannt.
2. **Triplet-Zustand:** gemäß obiger Formel folgt bei Triplet:  $2S + 1 = 3 \Rightarrow S = 1$ , die Spins der Elektronen sind also parallel ausgerichtet und addieren sich zu 1. Dementsprechend gibt es für die Ausrichtung des Gesamtspins drei Möglichkeiten:  $M_S = 1, 0, -1$ . Diesen Zustand nennt man Orthohelium, in diesem Fall ist Feinstruktur vorhanden.

Zwischen Singulett und Triplet sind keine optischen Übergänge möglich, wie als ob es zwei verschiedene Sorten Helium-Atome gäbe. Allgemein lässt sich aber sagen, dass die Triplet-Zustände bei gleicher Elektronenkonfiguration energetisch niedriger liegen als im Singulett. Obiges Termschemata wurde übrigens experimentell ermittelt.

## 1.8 Auswahlregeln

### Elektrische / Magnetische Dipolstrahlung

Typ	Parität	Auswahlregel $\Delta J$	Auswahlregel $\Delta M_J$
Elektrische Dipolstrahlung (E1)	u / -1	0, $\pm 1$ , <i>nicht</i> $0 \rightarrow 0$	0, $\pm 1$ , <i>El. Dip.</i>   , $\perp B$
Magnetische Dipolstrahlung (M1)	g / +1	0, $\pm 1$ , <i>nicht</i> $0 \rightarrow 0$	0, $\pm 1$ , <i>Magn. Dip.</i>   , $\perp B$
Elektrische Quadropolstrahlung (E2)	g / +1	0, $\pm 1$ , $\pm 2$ , <i>nicht</i> $0 \rightarrow 0$	0, $\pm 1$ , $\pm 2$

Einelektronenatome:

- $\Delta j = \pm 1, 0$
- $\Delta l = \pm 1$
- $\Delta s = 0$

Mehrelektronenatome:

- $\Delta J = \pm 1, 0$ , nicht  $J = 0 \rightarrow J = 0$
- $\Delta L = \pm 1, 0$
- $\Delta S = 0$  Interkombinationsverbot

j-j-Kopplung:

- $\Delta J = \pm 1, 0$ , nicht  $J = 0 \rightarrow J = 0$
- $\Delta j = \pm 1, 0$

Hyperfeinstruktur:

- $\Delta F = \pm 1, 0$  außer  $0 \leftrightarrow 0$
- $\Delta J = \pm 1, 0$  außer  $0 \leftrightarrow 0$
- $\Delta I = 0$

**Atome im äußeren Magnetfeld:**

- Zeeman-Effekt:  $\Delta M_J = \begin{Bmatrix} 0 & \pi \\ \pm 1 & \sigma \end{Bmatrix} - \text{Komponente}$
- Paschen-Back-Effekt:  $\Delta M_L = \begin{Bmatrix} 0 & \pi \\ \pm 1 & \sigma \end{Bmatrix} - \text{Komponente}$   
 $\Delta M_S = 0$  „strahlungslos“
- $\pi$ : parallel zum Magnetfeld (linear) polarisiert
- $\sigma$ : senkrecht zum Magnetfeld polarisiert  $\Rightarrow$  zirkular polarisiert

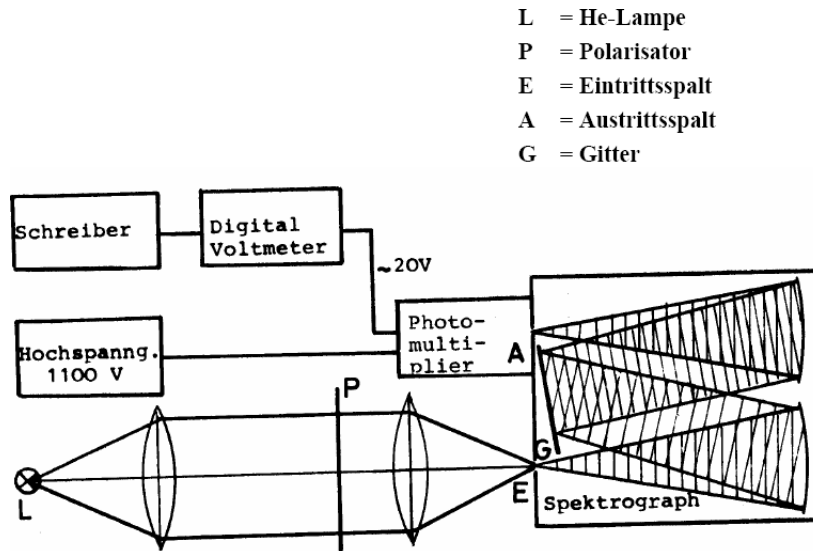
**Atome im elektrischen Feld**

- linearer Stark-Effekt:  $W_{el} = -\vec{p}_{el} \cdot \vec{E}$ 
  - $\vec{p}_{el}$ : elektrisches Dipolmoment
  - nur H-Atom verhält sich so
- nichtlinearer Stark-Effekt:  $\vec{p}_{ind,z} = \varepsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}$ 
  - $\alpha$ : Polarisierbarkeit
  - Alle anderen Atome:  $\vec{p}_{el} = \int \int \int \vec{r} |\Psi|^2 d\tau$
- Quadratischer Stark-Effekt
  - Auswahlregeln:  $\Delta M_J = \begin{Bmatrix} 0 & \pi \\ \pm 1 & \sigma \end{Bmatrix} - \text{Komponente}$

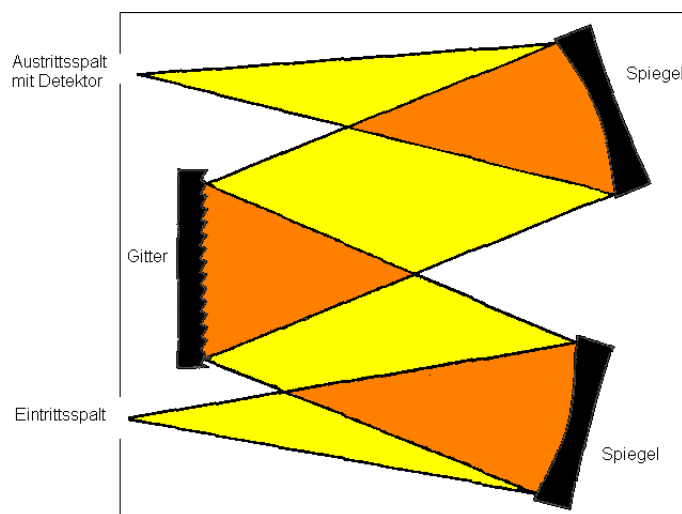
## 2 Experimenteller Aufbau

### 2.1 Theorie

Im Versuch beobachten wir das Spektrum des Heliumatoms mit einem Gitterspektrometer. Das Licht der Helium-Lampe wird über Linsen und einen Polarisator zum Gitterspektrometer geleitet, mit dem die Zerlegung in Spektrallinien vorgenommen wird.



Da in diesem Versuch das Gitterspektrometer das entscheidende Instrument ist, sei auf dessen Funktionsweise an dieser Stelle näher eingegangen. Nachdem das Licht durch den Eintrittsspalt gefallen ist, wird es zunächst einmal gespiegelt, bevor es auf das Gitter trifft. Durch die Beugung am Gitter ergibt sich ein Interferenzbild, das über einen zweiten Spiegel durch den Austrittsspalt auf einen Detektor fällt - früher arbeitete man mit Photoplatten. Aufgrund der Geometrie fällt immer nur ein kleiner Teil des Spektrums, d.h. eine einzelne Spektrallinie, auf den Detektor. Um nun das gesamte Spektrum zu analysieren, muss man das Gitter drehen. Dank neuer Entwicklungen in der Halbleiterindustrie wie dem CCD-Sensor ist es inzwischen aber auch möglich, nicht nur einen kleinen Spalt, sondern auch größere Spektralbereiche zu erfassen. Man spricht in diesem Fall von einem Polychromator, im Gegensatz zum herkömmlichen Monochromator, der nur einen schmalen Ausschnitt (eben jenen Austrittsspalt) auf einmal aufzeichnen kann.

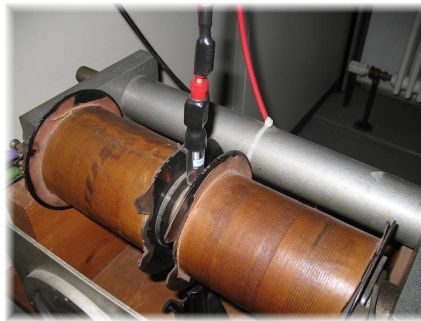


## 2.2 Praxis

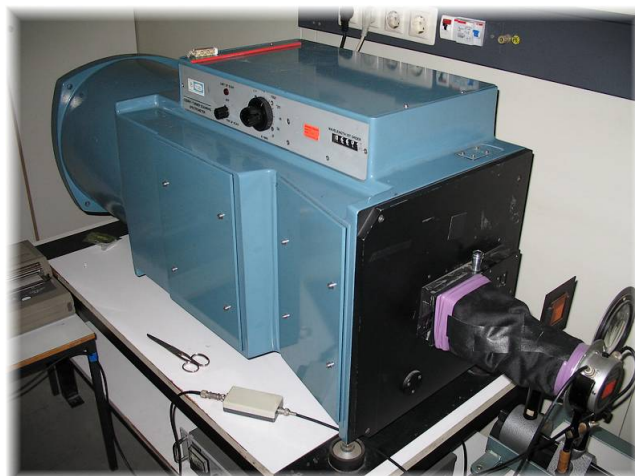
Im Praktikum war die Versuchsanordnung bereits vollständig aufgebaut:



Als Lichtquelle diente, wie schon erwähnt, eine Helium-Dampfampe. Sie war bereits zwischen den Spulen des Elektromagneten, der später das Magnetfeld für die Zeeman-Aufspaltung erzeugen sollte, angebracht. Ihre Helligkeit ließ sich regeln, so dass sich damit die Höhe der Peaks im Spektrum erhöhen ließ. Volle Helligkeit war besonders bei der Messung mit Polarisator im Strahlengang gefragt, da dieser relativ viel Intensität verschluckte. Zwei Linsen bündelten das Licht der He-Lampe so, dass es direkt in den Einfallsspalt des Gitterspektrometers fiel.



Das Gitterspektrometer selbst stellte sich als ziemlich wuchtige Konstruktion heraus und war schon an einen x-y-Schreiber angeschlossen. Das Spektrometer hatte eine direkte Anzeige für die Wellenlänge, außerdem eine Automatik um verschiedene Wellenlängen mit gleichbleibender Geschwindigkeit zu durchlaufen. Zu beachten war lediglich, dass das Gitter 10 nm „Spiel“ hatte - bei einem Richtungswechsel der Gitterdrehung musste also jeweils 10 nm „übers Ziel hinaus“ gelaufen werden, um nicht zu Beginn der Messung falsche Werte zu bekommen.





### 3 Durchführung

#### 3.1 Aufnahme eines Übersichtsspektrums

##### 3.1.1 Wellenlängenbereich 300 nm bis 800 nm

Mit oben beschriebener Apparatur ist zunächst ein Übersichtsspektrum aufzunehmen, und zwar im Wellenlängenbereich von 300 nm bis 800 nm. Hierzu sollen folgende Parameter gesetzt werden:

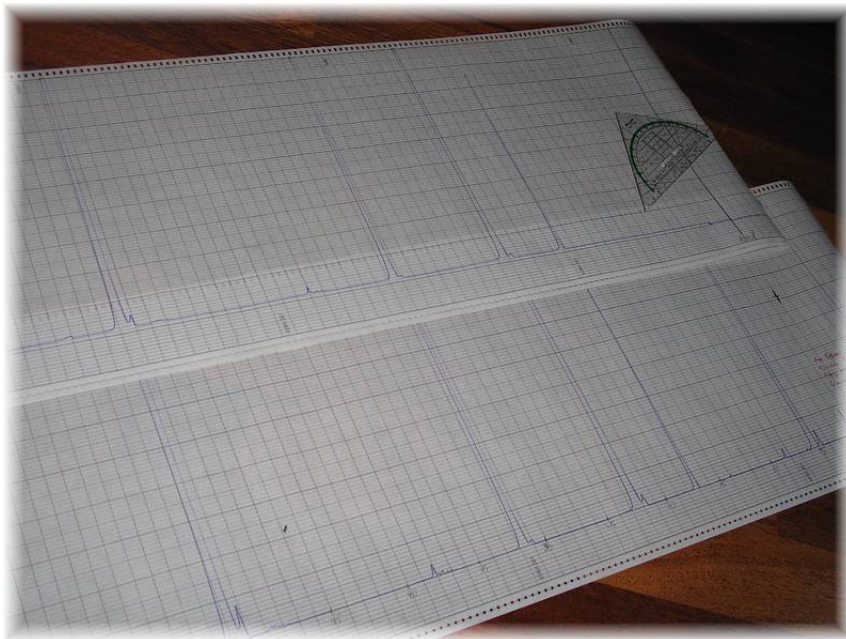
- Spaltöffnung:  $\sim 100\mu\text{m}$
- Gitterdrehung:  $500\frac{\text{A}^\circ}{\text{min}}$
- Schreibpapiervorschub:  $120\frac{\text{mm}}{\text{min}}$

Vorgehensweise war die folgende:

1. Das Spektrometer auf eine Wellenlänge von 800 nm stellen (dank Anzeige am Gerät problemlos möglich)
2. Startpunkt auf dem x-y-Schreiber markieren
3. Gitterdrehung und Schreibpapiervorschub gleichzeitig starten. Das Gitter dreht sich also mit  $50\frac{\text{nm}}{\text{min}}$ , während das Papier um  $12\frac{\text{cm}}{\text{min}}$  vorwärts läuft. Betrachtet man das Zeitintervall 1 min, so ist sofort einsichtig: 12 cm auf dem Papier entsprechen 50 nm Wellenlängendifferenz. Es ist also möglich, vom Startpunkt 800 nm ausgehend nach unten den Peaks Wellenlängen zuzuordnen, da man ja die Strecke zwischen Peak und dem bekannten Startpunkt (in unserem Fall eben die Wellenlänge  $\lambda = 800\text{ nm}$ ) messen und über diese Beziehung auf die Wellenlänge zurückrechnen kann.

##### 3.1.2 Wellenlängenbereich 500 nm bis 800 nm mit Rotfilter

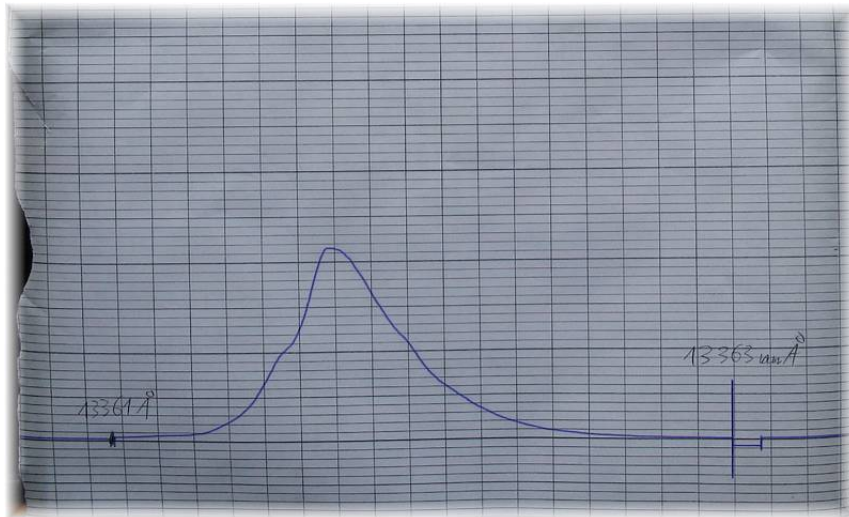
In diesem Wellenlängenbereich soll die Messung mit einem zusätzlichen Rotfilter im Strahlengang wiederholt werden. Der Rotfilter sorgt dafür, dass höhere Ordnungen ausgeblendet werden. Während wir in 3.1.1 sämtliche Peaks zu sehen bekommen, können wir bei dieser Messung sicher sein: jeder Peak ist ein Maximum 1. Ordnung, dem wir mit 100%iger Sicherheit einen Übergang im Termschema zuordnen können. Durch Vergleich mit 3.1.1 lassen sich also die einzelnen Peaks identifizieren.



### 3.2 Zeeman-Aufspaltung der He-I-667,8 nm-Linie

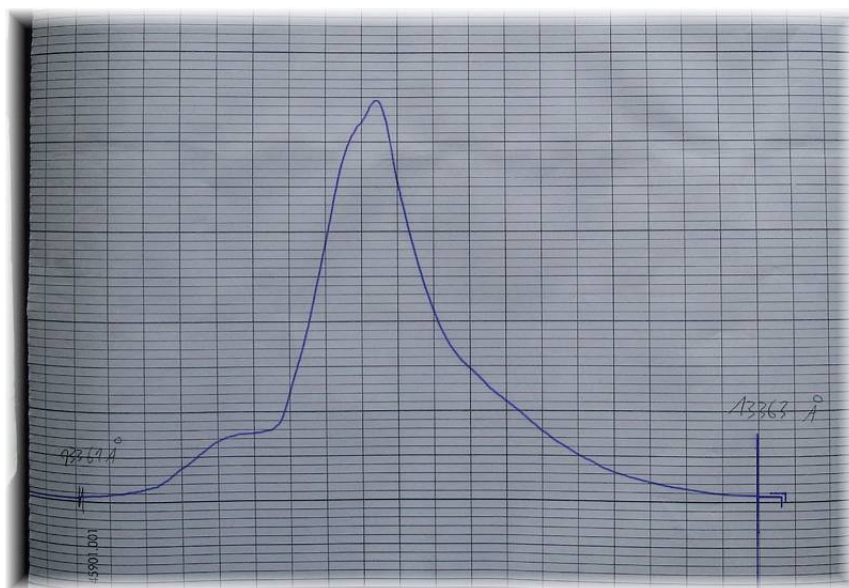
Nun soll die He-I-667,8 nm-Linie näher untersucht werden. Wir stellten allerdings die doppelte Wellenlänge am Spektrometer ein, da wir die Linie zwecks größerer Abstände in 2. Ordnung untersuchen wollten.

a) Ohne Polarisator,  $B = 0$  T



Wie erwartet ließ sich ohne Magnetfeld keine Zeeman-Aufspaltung feststellen, Ergebnis war eine einzelne Linie.

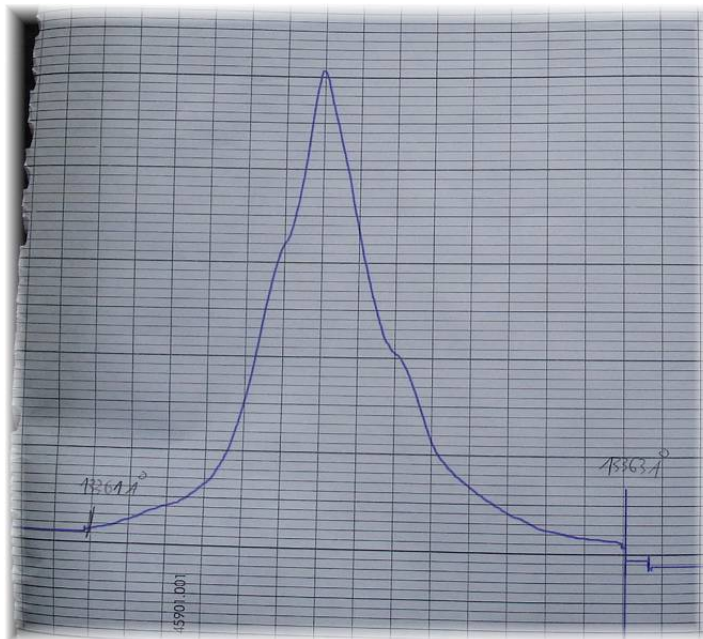
b) Ohne Polarisator,  $B \approx 1$  T



Mit Magnetfeld erwarten wir eine Zeeman-Aufspaltung, die sich leider nicht sehr gut zeigte. Beim normalen Zeeman-Effekt, der in diesem Fall vorliegen sollte, sollten drei Linien sichtbar werden, was man von unserer Messung nicht gerade behaupten kann. Immerhin ist im linken Bereich ein zusätzlicher Höcker zu sehen, der auf eine weitere Linie hindeutet.

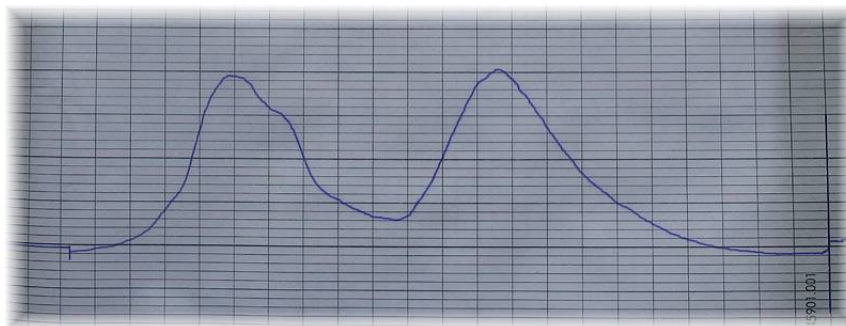
c)  $\sigma$ - und  $\pi$ -Polarisation,  $B \approx 1$  T

(i)  $\pi$ -Polarisation



Die drei Linien der normalen Zeeman-Aufspaltung setzen sich wie folgt zusammen: die mittlere Linie besteht aus parallel ( $\pi$ -) polarisiertem Licht, die beiden äußeren aus senkrecht ( $\sigma$ -) polarisiertem Licht. Wir haben also eine Möglichkeit, das weniger schöne Ergebnis von Teil b) zu verifizieren: Mit  $\pi$ -polarisiertem Licht erhalten wir alleine die mittlere Linie, was sich im Versuch sehr schön bestätigt hat.

(ii)  $\sigma$ -Polarisation



Die beiden äußeren Linien der normalen Zeeman-Aufspaltung sollten symmetrisch sein. Dies ist auch bei unserer Messung der Fall, es liegt also tatsächlich der normale Zeeman-Effekt vor.

d)  $\sigma$ -Polarisation,  $B \approx 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  T

Für verschiedene Magnetfeldstärken führten wir die Messung c) (ii) wiederholt durch, um daraus in der Auswertung  $\frac{e}{m}$  bestimmen zu können.

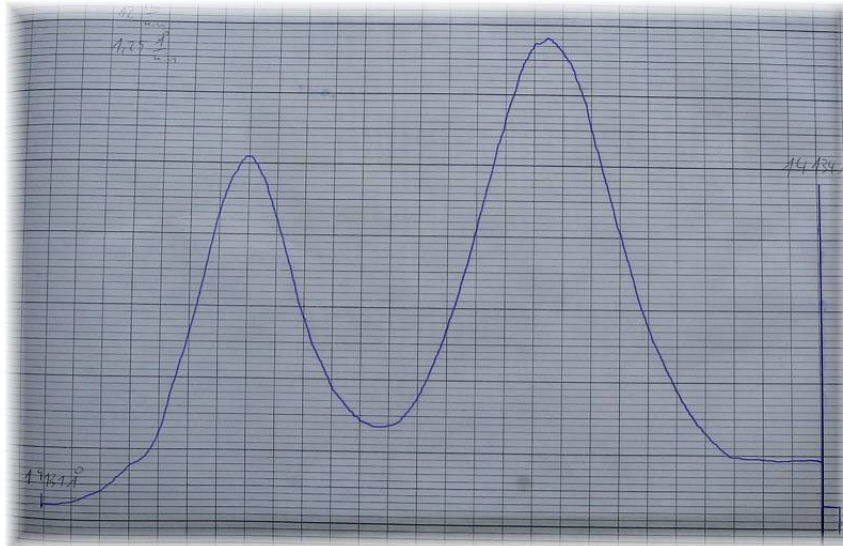
Einstellungen in diesem Versuchsteil waren:

- Gitterdrehung:  $1,25 \frac{A^\circ}{min}$
- Papiervorschub:  $120 \frac{mm}{min}$
- Spaltöffnung:  $40 - 50 \mu m$

### 3.3 Zeeman-Aufspaltung einer beliebigen anderen Linie

Anschließend soll wie in 3.2 eine Zeeman-Aufspaltung vorgenommen werden, allerdings diesmal mit einer anderen Linie des Spektrums. Um zu überprüfen, ob der normale Zeeman-Effekt vorliegt, nimmt man das Spektrum mit  $\sigma$ -Polarisator auf. Erhält man ein symmetrisches Bild zweier Peaks, so haben wir wie oben beschrieben den normalen Zeeman-Effekt nachgewiesen.

Wir untersuchten die  $\lambda = 706,5 \text{ nm}$ -Linie, die in zweiter Ordnung also bei  $\lambda = 1413,0 \text{ nm}$  zu finden sein müsste. Und tatsächlich: zwischen  $1413,1 \text{ nm}$  und  $1413,4 \text{ nm}$  (Abweichung wg. Messungenauigkeit) fanden wir mit  $\sigma$ -Polarisator und einem Magnetfeld von  $B = 1 \text{ T}$  folgende Aufspaltung:



Das Bild ist recht symmetrisch, wir sehen zwei Peaks. Also handelt es sich auch bei dieser Linie um den normalen Zeeman-Effekt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Zuordnung der He-Linien zu den Übergängen im Termschema

#### 4.1.1 Tabelle mit den Wellenlängen aller möglichen Übergänge

Bereits im Vorfeld haben wir alle möglichen Übergänge aus dem Termschema der Vorbereitungsmappe herausgesucht:

Theo. Wellenlänge [nm]	von	zu	Typ
318,7743	4p	2s	Orthohelium
344,7594	6P	2S	Parahelium
361,3641	5P	2S	Parahelium
369,4727	4P	2S	Parahelium
388,8603	3p2	2s	Orthohelium
388,8646	3p1	2s	Orthohelium
400,927	7D	2P	Parahelium
402,399	7S	2P	Parahelium
402,6189	5d	2p1	Orthohelium
402,6358	5d	2p2	Orthohelium
412,0812	5s	2p1	Orthohelium
412,0981	5s	2p2	Orthohelium
414,377	6D	2P	Parahelium
416,897	6S	2P	Parahelium
438,7928	5D	2P	Parahelium
443,7549	5S	2P	Parahelium
447,1477	4d	2p1	Orthohelium
471,3143	4s	2p1	Orthohelium
471,3366	4s	2p2	Orthohelium
477,1689	4d	2p2	Orthohelium
492,1929	4D	2P	Parahelium
501,5675	3P	2S	Parahelium
504,7736	4S	2P	Parahelium
587,5618	3d	2p1	Orthohelium
587,596	3d	2p2	Orthohelium
667,8149	3D	2P	Parahelium
706,5185	3s	2p1	Orthohelium
706,5707	3s	2p2	Orthohelium
728,1349	3S	2P	Parahelium
1082,91	2p2	2s	Orthohelium
1083,03	2p1	2s	Orthohelium
1278,46	5f	3d	Orthohelium
1279,22	5F	3D	Parahelium
1868,42	4f	3d	Orthohelium
1869,34	4F	3D	Parahelium
2058,204	2P	2S	Parahelium

Diese Vorarbeit sollte später die Identifizierung der Übergänge erleichtern. Durch die aufsteigende Anordnung der Wellenlängen war so ein Heraussuchen problemlos möglich.

### 4.1.2 Messung

Wie in 3.1 beschrieben ist es möglich, aus Schreibpapiervorschub und Gitterdrehung die Wellenlänge der einzelnen Peaks auszurechnen. In einer Minute bewegt sich bei unseren Einstellungen der x-y-Schreiber um 12 cm weiter, während sich das Gitter um 50 nm gedreht hat  $\Rightarrow 12 \text{ cm} \cong 50 \text{ nm}$ , also  $1 \text{ cm} \cong \frac{50}{12} \text{ nm}$ . Wir können also aus dem Abstand  $s$  des Peaks zur bekannten Wellenlänge  $\lambda = 800 \text{ nm}$  zurückrechnen (wir begannen mit der Messung bei 800 nm und ließen dann die Wellenlänge kleiner werden):

$$\lambda = 800 \text{ nm} - s \cdot \frac{50 \text{ nm}}{12 \text{ cm}} \quad (15)$$

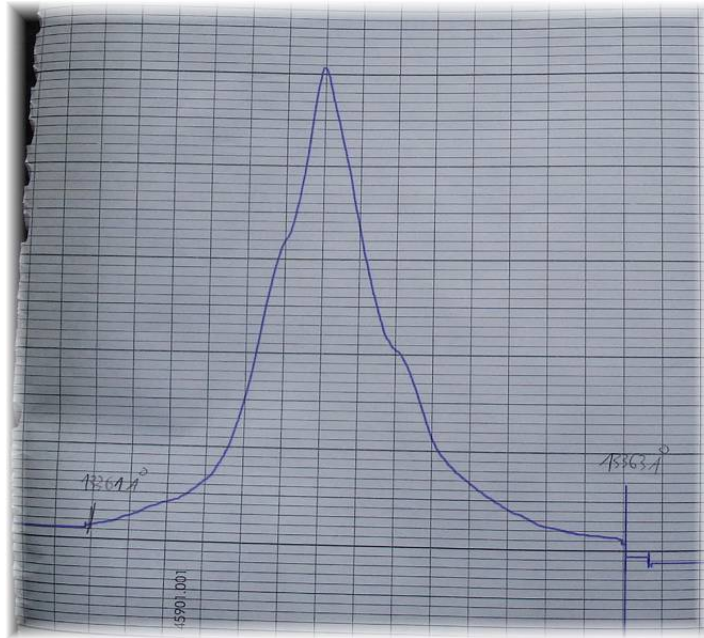
Mit Formel (15) können wir aus den Strecken  $s$  also die Wellenlänge  $\lambda$  der Peaks berechnen - in folgender Tabelle sind unsere Messwerte und die daraus berechneten Wellenlängen zu finden:

Strecke $s$ [cm]	Wellenlänge $\lambda$ [nm]	Mit Rotfilter sichtbar?	Übergang
1,5	793,8	Nein	höhere Ordnung
4,7	780,4	Nein	höhere Ordnung
5,3	777,9	Nein	höhere Ordnung
8,4	765,0	Nein	höhere Ordnung
17,1	728,8	Ja	$3S \rightarrow 2P$ Parahelium
21,7	709,6	Ja	$3s \rightarrow 2p2$ Orthohelium
22,3	707,1	Ja	$3s \rightarrow 2p1$ Orthohelium
31,6	668,3	Ja	$3D \rightarrow 2P$ Parahelium
50,2	590,8	Ja	$3d \rightarrow 2p2$ Orthohelium
50,9	587,9	Ja	$p3 \rightarrow 2p1$ Orthohelium
70,5	506,3	außerhalb Bereich	$4S \rightarrow 2P$ Parahelium
71,4	502,5	außerhalb Bereich	$3P \rightarrow 2S$ Parahelium
73,6	493,3	außerhalb Bereich	$4D \rightarrow 2P$ Parahelium
78,5	472,9	außerhalb Bereich	$4s \rightarrow 2p2$ Orthohelium
84,5	447,9	außerhalb Bereich	$4d \rightarrow 2p1$ Orthohelium
86,3	440,4	außerhalb Bereich	$5D \rightarrow 2P$ Parahelium
92,8	413,3	außerhalb Bereich	$5s \rightarrow 2p2$ Orthohelium
95	404,2	außerhalb Bereich	$5d \rightarrow 2p2$ Orthohelium
96,5	397,9	außerhalb Bereich	$7D \rightarrow 2P$ Parahelium
98,4	390,0	außerhalb Bereich	$3p1 \rightarrow 2s$ Orthohelium

Durch Vergleich der Wellenlängen  $\lambda$  mit der Tabelle aus 4.1.1 lassen sich die Übergänge (im Rahmen gewisser Meßungenauigkeiten) finden, sie sind bereits in obiger Tabelle eingetragen. Wie erwartet haben sich die mit Rotfilter nicht gefunden Übergänge auch nicht im Termschema wiedergefunden - schließlich sind dies höhere Ordnungen, die dort direkt nicht auftauchen. Für kleinere Wellenlängen ist diese Überprüfung per Rotfilter nicht mehr möglich, da aber dort logischerweise höhere Ordnungen seltener sind kann davon ausgegangen werden, dass die Übergänge trotzdem richtig zugeordnet sein sollten.

## 4.2 $\frac{e}{m}$ -Bestimmung mittels Zeeman-Aufspaltung

Die Aufspaltung der zu betrachtenden He-667,9nm-Linie wurde qualitativ bereits in der Durchführung (3.2) diskutiert. Deshalb beginnen wir an dieser Stelle gleich mit der Bestimmung von  $\frac{e}{m}$ . Zunächst möchten wir die tatsächlich von uns benutzte Wellenlänge herausfinden. Wir wollten ja die 2. Ordnung der 667,9nm-Linie benutzen, also theoretisch 1335,8 nm. Mit dem  $\pi$ -Polarisator (also nur mittlerer Peak!) erhielten wir folgendes Bild:



Handschriftlich haben wir dort den Bereich, der mit dem Spektrometer abgefahren wurde, notiert: 1336,1 nm bis 1336,3 nm. Wir gehen deshalb davon aus, dass wir die Wellenlänge in der Mitte, also  $\lambda_0 = 1336,2$  nm beobachtet haben (Achtung: diesmal andere Geschwindigkeit des Gitters,  $0,125 \frac{\text{nm}}{\text{min}}$  bei wie bisher  $12 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$  Papiervorschub, also  $1 \text{ cm} \cong \frac{0,125}{12} \text{ nm}$ ).

Für verschiedene Magnetfeldstärken haben wir in 3.2 d) jeweils das Spektrum bei  $\sigma$ -Polarisation aufgenommen, das ja aus zwei Spektrallinien besteht. Deren Abstand  $\Delta x$  haben wir mit dem Lineal ausgemessen. Da in diesem Fall  $1 \text{ cm} \cong \frac{0,125}{12} \text{ nm}$  (s.o.) gilt, können wir von  $\Delta x$  auf die Differenz der Wellenlängen  $\Delta \lambda$  schließen:

$$\Delta \lambda = \Delta x \cdot \frac{0,125 \text{ nm}}{12 \text{ cm}} \quad (16)$$

Bei  $B = 0,2 \text{ T}$  ließen sich die zwei Peaks nicht unterscheiden, die anderen Abstände sind in folgender Tabelle aufgeführt, in deren vierten Spalte die Wellenlängenänderung  $\Delta \lambda$  per Formel (16) berechnet wurde.

Strom I [A]	Magnetfeldstärke B [T]	$\Delta x$ [cm]	$\Delta \lambda$ [nm]	$\Delta \nu$ [GHz]
1,65	0,4	2,8	0,0292	4,90
2,2	0,5	3,8	0,0396	6,65
2,8	0,6	4,3	0,0448	7,53
3,5	0,7	5,8	0,0604	10,15
4,4	0,8	6,7	0,0698	11,73
5,6	0,9	7,1	0,0740	12,43

Mittels folgender Beziehung lässt sich aus  $\Delta \lambda$  der zugehörige Frequenzunterschied  $\Delta \nu$  bestimmen:

$$\Delta \nu = \frac{c \cdot \Delta \lambda}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \frac{c \cdot \Delta \lambda}{(\lambda_0 - \frac{\Delta \lambda}{2}) \cdot (\lambda_0 + \frac{\Delta \lambda}{2})} = \frac{c \cdot \Delta \lambda}{\lambda_0^2 - \frac{\Delta \lambda^2}{4}} \quad (17)$$

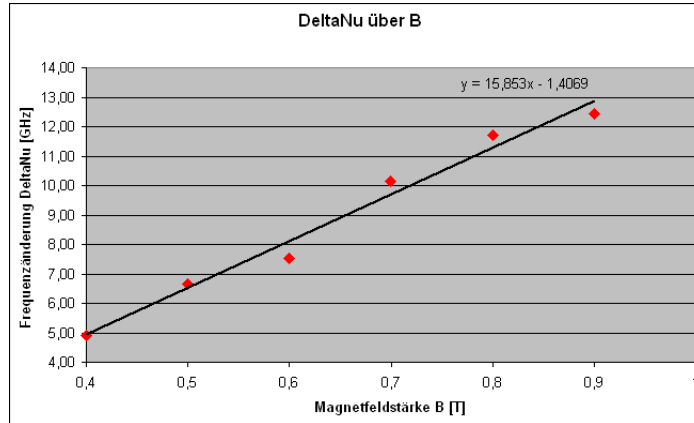
Mit Formel (17) und dem oben bestimmten  $\lambda_0$  wurde die letzte Spalte in der obigen Tabelle errechnet. Hierbei ist zu beachten: wir haben die Werte nicht in die 1. Ordnung umgerechnet, sowohl  $\Delta \lambda$  als auch  $\lambda_0$  sind in zweiter Ordnung angegeben - deshalb mittelt sich das wieder heraus.

In der Vorbetrachtung haben wir per Vektorgerüstmodell [Formel (13)] und mittels klassischer Überlegungen [Formel (8)] folgende Relation hergeleitet:

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e}{m_e} \cdot B \quad (18)$$

Die Frequenzänderung  $\Delta\nu$  ist also proportional zum angelegten Magnetfeld  $B$ . Wir sollten deshalb, falls wir  $\Delta\nu$  über  $B$  auftragen, eine Gerade mit Steigung  $a = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e}{m_e}$  erhalten.  $\frac{e}{m_e}$  lässt sich dann wie folgt ausrechnen:

$$\frac{e}{m_e} = 4\pi \cdot a \quad (19)$$



Unsere Messung ist halbwegs linear, die Ausgleichsgerade hat die Steigung  $a = 15,853 \frac{GHz}{T}$ . Mit (19) erhalten wir dann:

$$\frac{e}{m_e} = 1,992 \cdot 10^{11} \frac{1}{Ts} = 1,992 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad (20)$$

#### 4.2.1 Statistischer Fehler

Die Berechnung eines statistischen Fehlers ist nicht möglich, da für jede Magnetfeldstärke nur eine Messung vorgenommen wurde. Allerdings gehen bei der Bestimmung der Ausgleichsgeraden ja mehrere Werte auf einmal ein, so dass sich hier die statistische Unsicherheit von Steigung und y-Achsenabschnitt angeben lässt.

Für die  $\frac{e}{m}$ -Bestimmung interessiert uns nur die Steigung der Ausgleichsgeraden. Im Fehlerskript zum Physikalischen Anfängerpraktikum wurde gezeigt, wie man diese berechnet:

$$m = \frac{N \cdot (\sum x_i y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (21)$$

Hierbei entsprechen den folgenden Größen:

- $N$ : Anzahl der Messungen, in diesem Fall  $N = 6$
- $y_i$ : y-Werte, in diesem Fall die Frequenzänderungen  $\Delta\nu$
- $x_i$ : x-Werte, in diesem Fall die Magnetfeldstärken  $B$

Für den y-Achsenabschnitt  $b$  gilt dann, ebenfalls nach dem Fehlerskript:

$$b = \frac{(\sum x_i^2) \cdot (\sum y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum x_i y_i)}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (22)$$

Zur Berechnung der statistischen Abweichung von  $m$  und  $b$  benötigen wir die Varianz der y-Werte  $\sigma_y$ . Für diese gilt nach dem Fehlerskript:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - m \cdot x_i - b)^2 \quad (23)$$



Haben wir mit (23) die Varianz berechnet, lässt sich die Unsicherheit der Steigung  $\sigma_m$  ermitteln:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \cdot N} \quad (24)$$

Den Relativwert der Unsicherheit erhält man, indem man die Unsicherheit durch den ermittelten Wert teilt:

$$\sigma_m (rel.) = \frac{\sigma_m}{m} \quad (25)$$

Die Formeln (21) bis (25) ergeben für unsere Messwerte folgende Zahlenwerte:

m	15852519834
b	-1406890305
$\sigma_y^2$	2,39534E+17
$\sigma_m$	1169943777
$\sigma_m (rel.)$	7,38%

$\sigma_m$  ist die Ungenauigkeit der Steigung. Formel (19) setzt diese mit  $\frac{e}{m_e}$  in Verbindung, so dass wir folgende statistische Unsicherheit unseres Ergebnisses erhalten:

$$\delta_{\frac{e}{m_e}} = 4\pi \cdot \sigma_m = 0,147 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad (26)$$

#### 4.2.2 Systematischer Fehler

Um auf die Frequenzverschiebung  $\Delta\nu$  zukommen, haben wir zunächst im Diagramm den Abstand  $\Delta x$  der beiden Maxima vermessen. Mit dem Lineal gehen wir hier von einer Ableseungenauigkeit von  $\delta_{\Delta x} = 1 \text{ mm}$  aus.  $\Delta\lambda$  errechnete sich daraus mit der Beziehung (16), die sich aus der Geschwindigkeit der Gitterdrehung und dem Papiervorschub ergab. Wie pflanzt sich nun der Fehler fort? Gemäß Größtfehlerabschätzung gilt:

$$\delta_{\Delta\lambda} = \left| \frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\Delta x} \right| \cdot \delta_{\Delta x} \quad (27)$$

$$= \left| \frac{0,125 \text{ nm}}{12 \text{ cm}} \right| \cdot 1 \text{ mm} \quad (28)$$

$$= 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ nm} \quad (29)$$

Anschließend haben wir daraus mit Formel (17) die Frequenzänderung  $\Delta\nu$  berechnet, in die zusätzlich noch die mittlere Wellenlänge  $\lambda_0$  eingeht.  $\lambda_0$  hatten wir relativ grob als Mitte des untersuchten Bereichs 1336,1nm..1336,3nm angenommen, hier möchten wir den Fehler deshalb mit  $\delta_{\lambda_0} = 0,01 \text{ nm}$  annehmen. Wendet man die Größtfehlerfortpflanzung nun auf Formel (17) an, so erhalten wir folgende Unsicherheit unserer Frequenzverschiebung:

$$\delta_{\Delta\nu} = \left| \frac{\partial\Delta\nu}{\partial\Delta\lambda} \right| \cdot \delta_{\Delta\lambda} + \left| \frac{\partial\Delta\nu}{\partial\lambda_0} \right| \cdot \delta_{\lambda_0} \quad (30)$$

$$= \left| \frac{c \cdot \left( \lambda_0^2 - \frac{\Delta\lambda^2}{4} \right) + c \cdot \Delta\lambda^2 \cdot \frac{1}{2}}{\left( \lambda_0^2 - \frac{\Delta\lambda^2}{4} \right)^2} \right| \cdot \delta_{\Delta\lambda} + \left| \frac{-c \cdot \Delta\lambda \cdot 2 \cdot \lambda_0}{\left( \lambda_0^2 - \frac{\Delta\lambda^2}{4} \right)^2} \right| \cdot \delta_{\lambda_0} \quad (31)$$

Natürlich erhalten wir für jedes  $\Delta\lambda$  ein anderes  $\delta_{\Delta\nu}$ . Alle Werte [mit Formel (31) berechnet] sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\Delta\lambda$ [nm]	$\Delta\nu$ [GHz]	$\delta_{\Delta\nu}$ [GHz]
0,0292	4,90	0,174747832
0,0396	6,65	0,174747851
0,0448	7,53	0,174747861
0,0604	10,15	0,174747891
0,0698	11,73	0,174747909
0,0740	12,43	0,174747916

Da bei allen Werten die ersten drei Nachkommastellen übereinstimmen, gehen wir vom Fehler  $\delta_{\Delta\nu} = 0,175$  GHz aus. Die Berechnung des letztendlich gefragten Quotienten  $\frac{e}{m}$  erfolgte (über die Regression) mit Formel (18), also direkt hingeschrieben:

$$\frac{e}{m_e} = \frac{4\pi \cdot \Delta\nu}{B} \quad (32)$$

Dessen Fehler ergibt sich nach Größtfehlerabschätzung zu:

$$\delta_{\frac{e}{m}} = \left| \frac{\partial \frac{e}{m}}{\partial \Delta\nu} \right| \cdot \delta_{\Delta\nu} + \left| \frac{\partial \frac{e}{m}}{\partial B} \right| \cdot \delta_B \quad (33)$$

$$= \left| \frac{4\pi}{B} \right| \cdot \delta_{\Delta\nu} + \left| \frac{-4\pi \cdot \Delta\nu}{B^2} \right| \cdot \delta_B \quad (34)$$

Die Ungenauigkeit des Magnetfeldes schätzen wir mit  $\delta_B = 0,02$  T ab, da es zum einen mit der Kallibrierungskurve nicht absolut exakt einstellbar war und außerdem sich während der Messung aufgrund von Erwärmung änderte. Wie bereits bei  $\delta_{\Delta\nu}$  erhalten wir für jede Messung ein eigenes  $\delta_{\frac{e}{m}}$ , weshalb wir mittels (34) eine Tabelle erhalten:

$\Delta\nu$ [GHz]	Magnetfeldstärke B [T]	$\delta_{\frac{e}{m}}$
4,90	0,4	13195912791
6,65	0,5	11084601706
7,53	0,6	8919467665
10,15	0,7	8348488137
11,73	0,8	7354022310
12,43	0,9	6299312249

Wir wählen hiervon den größten Fehler aus und erhalten als statistischen Fehler für  $\frac{e}{m_e}$ :

$$\delta_{\frac{e}{m_e}} = 0,132 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad (35)$$

### 4.2.3 Gesamtfehler

Aus 4.1.1 und 4.1.2 erhalten wir insgesamt:

$$\frac{e}{m_e} = (1,992 \pm 0,147 \pm 0,132) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad (36)$$

Der Literaturwert beträgt  $\frac{e}{m_e} = 1,759 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$ , er liegt also wenigstens im Toleranzbereich unserer Messung, wenngleich unsere Bestimmung nicht absolut exakt war.