Analysis III - Übersicht Differentialgleichungen

von Julian Merkert, Wintersemester 2005/06, Dr. Schmoeger

Differentialgleichungen 1. Ordnung	**Systeme 1. Ordnung**	**Differentialgleichungen m-ter Ordnung**
Allgemein: $y' = f(x, y)$	**Allgemein**: $y' = f(x, y)$ • $y = (y_1, ..., y_m)$ und $f = (f_1, ..., f_m)$	**Gewöhnliche DGL**: $F(x, y, y', ..., y^{(m)}) = 0$ **Explizite DGL**: $y^{(m)} = f(x, y, y', ..., y^{(m-1)})$
Lineare DGL 1. Ordnung: $\boxed{y' = a(x) \cdot y + s(x)}$ • Lösung von (H) $y' = a(x) \cdot y :\ \ y_h(x) = c \cdot e^{A(x)}$ • Spezielle Lösung: Variation der Konstanten mit Ansatz $y_s(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$ • Allgemeine Lösung der DGL: $y = y_h + y_s$	**Lineares System**: (S) $\boxed{y' = A(x)y + b(x)}$ • $A(x) := (a_{jk}(x)),\ y = (y_1, ..., y_m)$ • $b(x) := (b_1(x), ..., b_m(x)),\ y := (y_1, ..., y_m)$ • $\mathbb{L} := \{y : I \to \mathbb{R}^m : y$ löst (H) auf $I\}$ • Fundamentalsystem von (H) $y' = A(x)y$: $y^{(1)}(x), ..., y^{(m)}(x) \in \mathbb{L}$ linear unabhängig • Spezielle Lösung: $y_s(x) := Y(x) \int (Y(x))^{-1} b(x)\ dx$ $y_s(x) = \sum_{k=1}^{m} \left(\int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx \right) y^{(k)}(x)$	**Lineare DGL m-ter Ordnung**: $\boxed{Ly = b(x)}$ • $Ly := y^{(m)} + a_{m-1}(x) y^{(m-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x)$ • Lösung von (H) $Ly = 0$: für $m = 2$ mir Reduktionsverfahren nach d'Alembert • Spezielle Lösung: $y_s := \sum_{k=1}^{m} y_k \int \frac{W_k(x)}{W(x)}\ dx$ • $W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$
	Lineares System mit konstanten Koeffizienten: (S) $\boxed{y' = Ay + b(x)}$ • FM von (H) $y' = Ay :\ \ e^{xA}$ • Konkret: $y^{(j)}(x) := e^{\lambda_j x} c^{(j)}$ mit $c^{(j)}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_j von A ist FS • Spezielle Lösung: Ansatz $y_s(x) = c_1(x) y^{(1)}(x) + ... + c_m(x) y^{(m)}(x)$	**Lineare DGL m-ter Ordnung mit konst. Koeff.**: • $Ly := y^{(m)} + a_{m-1} y^{m-1} + ... + a_1 y' + a_0 y$ • $p(\lambda) := \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + ... + a_1 \lambda + a_0$ • λ_0 sei eine q-fache Nullstelle von p. Dann sind $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, ..., x^{q-1} e^{\lambda_0 x}$ l.u. Lösungen von (H) $\Rightarrow$ (komplexes) Fundamentalsystem von (H) durch Anwendung auf alle Nullstellen von p, spezielle Lösung siehe Formelsammlung.

DGL mit getrennten Veränderlichen:

$\boxed{y' = g(y) \cdot f(x)}$

- Lösungsverfahren: Trennung der Veränderlichen

Eulersche DGL:

$\boxed{x^m y^{(m)} + a_{m-1} x^{m-1} y^{(m-1)} + ... + a_1 x y' + a_0 y = b(x)}$

- Lösung: Substituiere $x = e^t$ und setze $u(t) := y(e^t) = y(x)$, dies führt auf eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten $\Rightarrow u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + ... + b_1 u' + b_0 u = b(e^t)$

$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

- Setze $u := \frac{y}{x}$, dies führt auf eine DGL mit getrennten Veränderlichen für u.

Bernoullische DGL: $\boxed{y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^\alpha = 0}$

- Dividiere durch y^α und setze $u := y^{1-\alpha}$. Dies führt auf eine lineare DGL für u.

Exakte DGL: $\boxed{P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0}$

- (P, Q) muss eine Stammfunktion besitzen, nachprüfen über $P_y = Q_x$
- Lösung: Stammfunktion $F(P,Q)$ mit $F_x = P$, $F_y = Q$ bestimmen und Gleichung $F(x, y(x)) = c$ nach $y(x)$ auflösen

Riccatische DGL: $\boxed{y' + g(x) \cdot y + h(x) \cdot y^2 = k(x)}$

1. Sei y_1 eine bekannte Lösung der DGL. Setze $z := \frac{1}{y - y_1}$
2. Es gilt dann: $z' = (g(x) + 2 \cdot y_1 \cdot h(x)) \cdot z + h(x)$, lineare DGL für z (*)
3. Allgemeine Lösung: $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$, wobei z die allgemeine Lösung von (*) durchläuft.

Exakte DGL mit Multiplikator:

$\boxed{(\mu P)dx + (\mu Q)dy = 0}$

- μ Multiplikator $:\Leftrightarrow (\mu P)_y = (\mu Q)_x$
- Hängt $f := \frac{1}{Q}(P_y - Q_x)$ nur von x ab, so ist $\mu(x) := e^{\int f(x)\ dx}$ ein Multiplikator
- Hängt $f := \frac{1}{P}(P_y - Q_x)$ nur von y ab, so ist $\mu(y) := e^{\int f(y)\ dy}$ ein Multiplikator